

УДК 621.3

Р.О.Мазманян, канд.техн.наук (Ин-т электродинамики НАН Украины, Киев)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ВЫБОРОК СЛУЧАЙНОГО НЕКОРРЕЛИРОВАННОГО СИГНАЛА

Рассмотрены упорядоченные выборки случайного некоррелированного шума с нулевым средним ("белый шум"), получены формулы авто-, взаимных и кросс-спектральных плотностей мощности для элементов скользящих упорядоченных выборок данных.

Розглянуто упорядковані вибірки випадкового некорельованого шуму з нульовим середнім ("білий шум"), отримано формули авто-, взаємних, крос-спектральних щільностей потужності для елементів ковзних упорядкованих вибірок даних.

Функции спектральной плотности случайных сигналов, полученных из ограниченного значением X_m случайного некоррелированного и несмещенного шума посредством скользящих упорядоченных выборок [2,4], являются важной составляющей в описании вероятностной структуры таких преобразований. Для этого метода обработки измерительной информации ранее были получены функции распределения, плотности вероятности, математического ожидания, дисперсии, совместных плотностей вероятности, ковариационных и корреляционных моментов для отдельных элементов или пары элементов упорядоченных выборок заданного порядка d [3,5].

На основании результатов, изложенных в [3,5], завершив описание вероятностной структуры метода скользящих упорядоченных выборок получением оценок спектральных характеристик преобразованных данных для элементов выборок. Эти оценки представляют собой функции распределения дисперсии (среднеквадратического значения) по частотам, которые по аналогии с процессами в электрических цепях называют спектральной плотностью мощности (СПМ). Существуют несколько способов определения СПМ [1,6,7]. Метод Блекмена–Тьюки [7] основан на использовании теоремы Винера–Хинчина, которая парой прямого и обратного преобразований Фурье устанавливает связь между спектральной плотностью $S(f)$ и корреляционной функцией $R(\tau)$

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau; \\ R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(j2\pi f\tau) df = 2 \int_0^{\infty} S(f) \exp(j2\pi f\tau) df, \end{aligned} \quad (1)$$

где f – частота, τ – время.

Для заданного k_z и произвольного k_y элементов выборки авто- ($k_y = k_z$) и взаимным ($k_y \neq k_z$) корреляционным функциям $C_{k_y, k_z}(\Delta i)$ соответствуют выражения

$$C_{k_y, k_z}(\Delta i) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\Delta i|}{2d+1}\right) \cdot \frac{k_y+1}{k_z+1} \cdot D_{k_z}^{S_S}, & 0 \leq k_y \leq k_z; \\ \left(1 - \frac{|\Delta i|}{2d+1}\right) \cdot \frac{2d+1-k_y}{2d+1-k_z} \cdot D_{k_z}^{S_S}, & k_z \leq k_y \leq 2d; \\ 0, & 0 > k_y > 2d; \end{cases}, \quad (2)$$

где $d = (N-1)/2$ – порядок упорядоченной выборки, содержащей нечетное число элементов N .

Здесь дисперсия $D_{k_z}^{S_S}$ заданного элемента упорядоченных выборок [5] определяется из уравнений

$$D_{k_z}^{S_S} = D_{S_S}(k_z, d) = D_{S_H}(k_z, d) - \mu_S^2(k_z), \quad (3)$$

$$D_{S_H}(k_z, d) = X_m^2 \cdot \frac{(2d+1)!}{2^{2d+1}} \cdot \sum_{j=0}^{k_z} \sum_{m=0}^{2d-k_z} \frac{(-1)^m + (-1)^j}{j! \cdot (k_z - j)! \cdot m! \cdot (2d - k_z - m)! \cdot (m + j + 3)}, \quad (4)$$

а средние значения только для заданного элемента выборок $\mu_S(k_z)$ определяются из уравнения, полученного в [5]

$$\mu_S(k_z) = \frac{(2d+1)!}{2^{2d+1}} \cdot X_m \cdot \sum_{j=0}^{k_z} \sum_{m=0}^{2d-k_z} \frac{(-1)^m - (-1)^j}{j! \cdot m! \cdot (k_z - j)! \cdot (2d - k_z - m)! \cdot (m + j + 2)}. \quad (5)$$

Примем следующие обозначения при определении взаимной спектральной плотности мощности: $\omega_n = 2\pi n/N$ – относительная частота, $\tau = \Delta t/N$ – непрерывный аргумент, определяющий дискретную задержку $\Delta i = n \cdot \tau$ для целочисленных $n = 0, 1, \dots, N$ и временного интервала $\Delta t = 1$ между значениями n_i и n_{i+1} . Принятые обозначения и формулы (1), (2) определяют одностороннюю взаимную спектральную плотность мощности преобразованных данных для произвольной пары элементов следующими выражениями

$$S_{k_y, k_z}(\omega_n) = \begin{cases} \int_0^{2d} \left(1 - \frac{|\tau|}{2d+1}\right) \cdot \frac{k_y+1}{k_z+1} \cdot D_{k_z}^{S_S} \cdot e^{-j\omega_n \tau} d\tau, & 0 \leq k_y \leq k_z \\ \int_0^{2d} \left(1 - \frac{|\tau|}{2d+1}\right) \cdot \frac{2d+1-k_y}{2d+1-k_z} \cdot D_{k_z}^{S_S} \cdot e^{-j\omega_n \tau} d\tau, & k_z \leq k_y \leq 2d \\ 0, & 0 > k_y > 2d \end{cases}, \quad (6)$$

которые после преобразований принимают вид:

– для $\omega_n \neq 0$

$$S_{k_y, k_z}(\omega_n) = \frac{2D_{k_z}^{S_S}}{\omega_n^2 \cdot (2d+1)} \cdot \left[-(1 - j\omega_n) e^{-j2d\omega_n} + (1 - j\omega_n(2d+1)) \right] \cdot \begin{cases} \frac{k_y+1}{k_z+1}, & 0 \leq k_y \leq k_z \\ \frac{2d+1-k_y}{2d+1-k_z}, & k_z \leq k_y \leq 2d \end{cases}; \quad (7)$$

– для $\omega_n = 0$

$$S_{k_y, k_z}(\omega_n) = 4d \cdot D_{k_z}^{S_s} \cdot \frac{d+1}{2d+1} \cdot \begin{cases} \frac{k_y+1}{k_z+1}, & 0 \leq k_y \leq k_z \\ \frac{2d+1-k_y}{2d+1-k_z}, & k_z \leq k_y \leq 2d \end{cases}; \quad (8)$$

$$S_{k_y, k_z}(\omega_n) = 0, \quad 0 > k_y > 2d. \quad (9)$$

Записанное в тригонометрической форме выражение (7) примет вид

$$S_{k_y, k_z}(\omega_n) = \frac{2D_{k_z}^{S_s}}{\omega_n^2 \cdot (2d+1)} \cdot [(\omega_n \cdot \sin(2d\omega_n) - \cos(2d\omega_n) + 1) + j \cdot (\sin(2d\omega_n) + \omega_n \cdot \cos(2d\omega_n) - \omega_n \cdot (2d+1))] \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{k_y+1}{k_z+1}, & 0 \leq k_y \leq k_z; \\ \frac{2d+1-k_y}{2d+1-k_z}, & k_z \leq k_y \leq 2d. \end{cases} \quad (10)$$

Взаимные коспектральная $\text{Re}(S_{k_y, k_z})$ (рис. 1, а) и квадратурная $\text{Im}(S_{k_y, k_z})$ (рис. 1, б) спектральные плотности определены для $d = 3$ и $k_z = 5$.

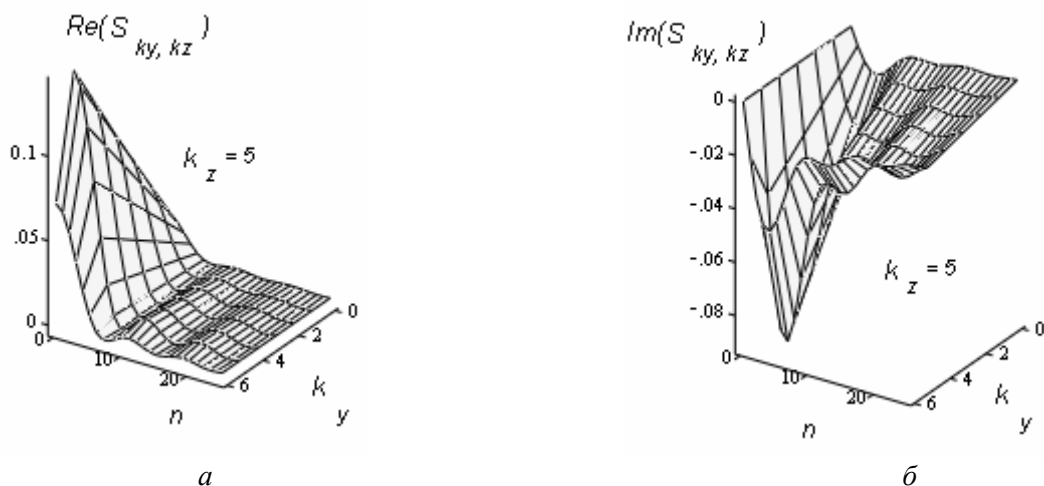


Рис. 1

Как видно из рис. 1, значения взаимных спектральных плотностей возрастают по мере приближения к элементу с заданным номером.

Модуль и фазовый угол взаимных спектральных плотностей мощности для показательной и тригонометрической форм записи после преобразований определяются выражениями

$$|S_{k_y, k_z}(\omega_n)| = \frac{2D_{k_z}^{S_s}}{\omega_n^2 \cdot (2d+1)} \cdot \sqrt{2[(\omega_n^2 \cdot (2d+1) + 1) \cdot (1 - \cos(2d\omega_n)) + 2d\omega_n \cdot (d\omega_n - \sin(2d\omega_n))]} \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{k_y+1}{k_z+1}, & 0 \leq k_y \leq k_z; \\ \frac{2d+1-k_y}{2d+1-k_z}, & k_z \leq k_y \leq 2d, \end{cases}$$

$$\theta_k = \arctg \frac{\sin(2d\omega_n) + \omega_n \cdot \cos(2d\omega_n) - \omega_n \cdot (2d + 1)}{\omega_n \cdot \sin(2d\omega_n) - \cos(2d\omega_n) + 1}.$$

Для скользящих выборок порядка $d = 3$ и $0 \leq k \leq 2d + 1$ модуль и фазовый угол имеют вид, показанный на рис. 2, а, б.

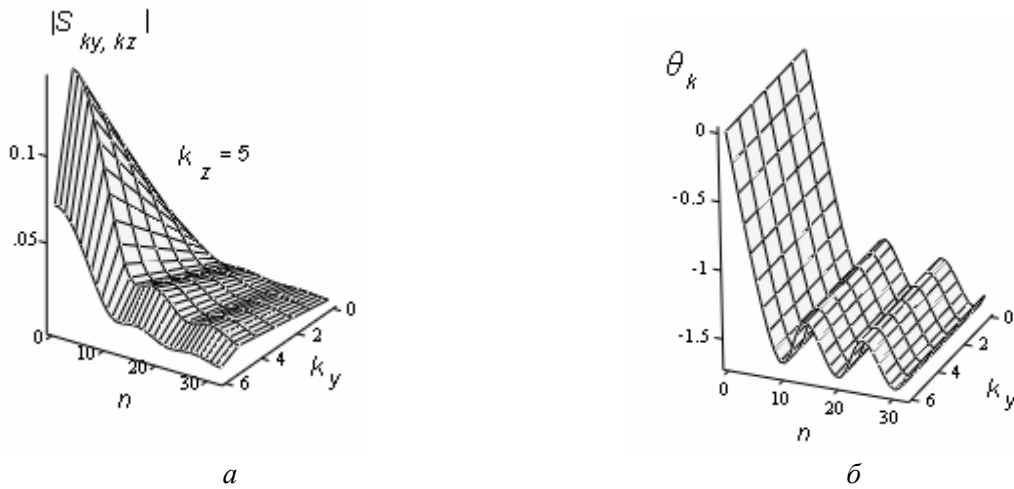


Рис. 2

Если и здесь значение модуля достигает максимума для элемента с заданным номером, то фазовый угол не зависит от номера элемента k .

Авто-коспектральная $Re(S_k)$ и квадратурная $Im(S_k)$ спектральные плотности, представленные на (рис. 3, а) и (рис. 3, б), соответственно, определены для порядка $d = 3$ и $0 \leq k \leq 2d + 1$. Значения автоспектральных плотностей расположены симметрично относительно наибольшего из них, которое соответствует медиане выборки.

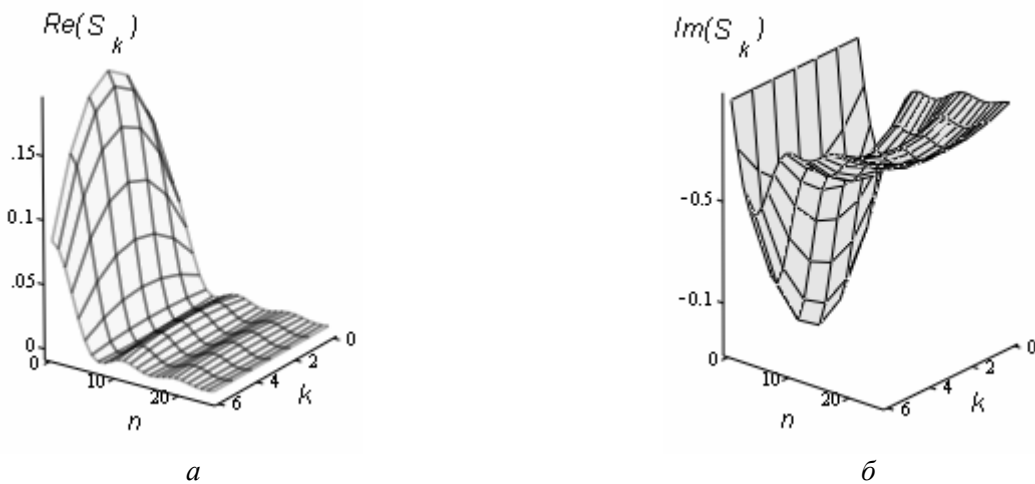


Рис. 3

Кросс-спектральные плотности мощности, характеризующие перераспределение СПМ входного сигнала по последовательностям обработанных данных, соответствующих элементам скользящих выборок, получим подстановкой кросскорреляционных функций [3]

$$C_k(\Delta i) = \frac{1}{2} \cdot p(\Delta i) \cdot (D_k^{S^D} - \mu_k^2) = \frac{1}{2} \cdot p(\Delta i) \cdot D_k^{S^S};$$

$$p(\Delta i) = \begin{cases} 1 & -2d \leq \Delta i \leq 2d; \\ 0 & \Delta i < -2d; \Delta i > 2d, \end{cases} \quad (11)$$

где $0 \leq k \leq 2d + 1$ – номер элемента выборки порядка d ; $D_k^{S_D}, D_k^{S_S}$ – смещенные и несмещенные значения дисперсии, в формулу (1)

$$G_k(\omega_n) = 0.5 \cdot \int_0^{2d} D_k^{S_S} \cdot e^{-j\omega_n \tau} d\tau. \quad (12)$$

После преобразований получим

$$G_k(\omega_n) = \begin{cases} j \frac{1}{2\omega_n} D_k^{S_S} \cdot e^{-j2\omega_n d} - 1, & n \neq 0 \\ d \cdot D_k^{S_S}, & n = 0. \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_n} D_k^{S_S} \cdot [\sin(2\omega_n d) + j \cdot (\cos(2\omega_n d) - 1)], & n \neq 0 \\ d \cdot D_k^{S_S}, & n = 0. \end{cases} \quad (13)$$

На рис. 4, а, б показаны кросс-спектральная и кросс-квадратурная плотности мощности для последовательностей обработанных данных.

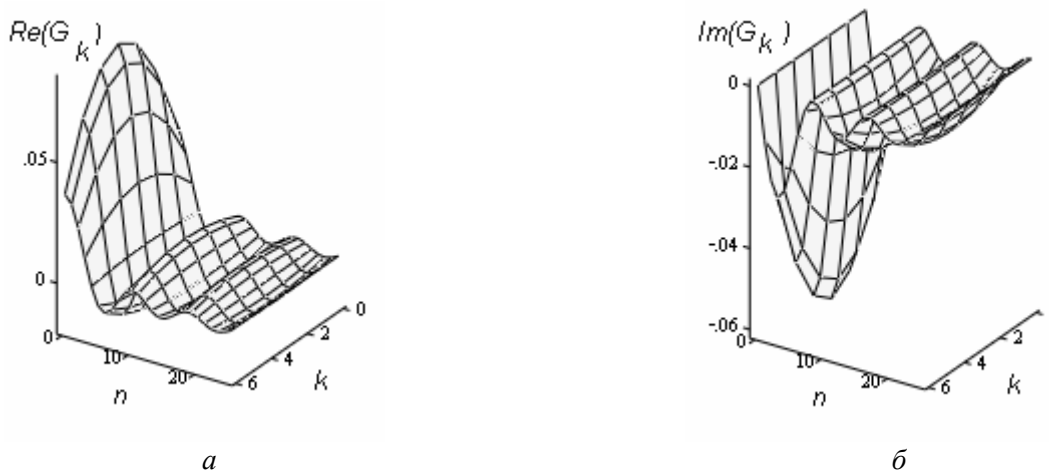


Рис. 4

Кросс-спектральные плотности мощности симметричны относительно медианы выборки. Модуль и фазовый угол кросс-спектральной плотности мощности определены из формул

$$|G_k| = \sqrt{\text{Re}^2(G_k) + \text{Im}^2(G_k)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{D_k^{S_S}}{\omega_n} \cdot \sqrt{1 - \cos(2\omega_n d)}, \quad (14)$$

$$\theta_k = \arctg[\text{Im}(G_k)/\text{Re}(G_k)] = -\omega_n d.$$

Заметим, что фазовый угол пропорциональный частоте и порядку выборки, также не зависит от номера элемента k .

Для выборок порядка $d = 3$ и $0 \leq k \leq 2d + 1$ модуль и фаза спектральной плотности мощности имеют вид, представленный на рис. 5, а, б. Здесь фазовая частотная характеристика приведена к значениям $0 \leq \theta \leq \pi$.

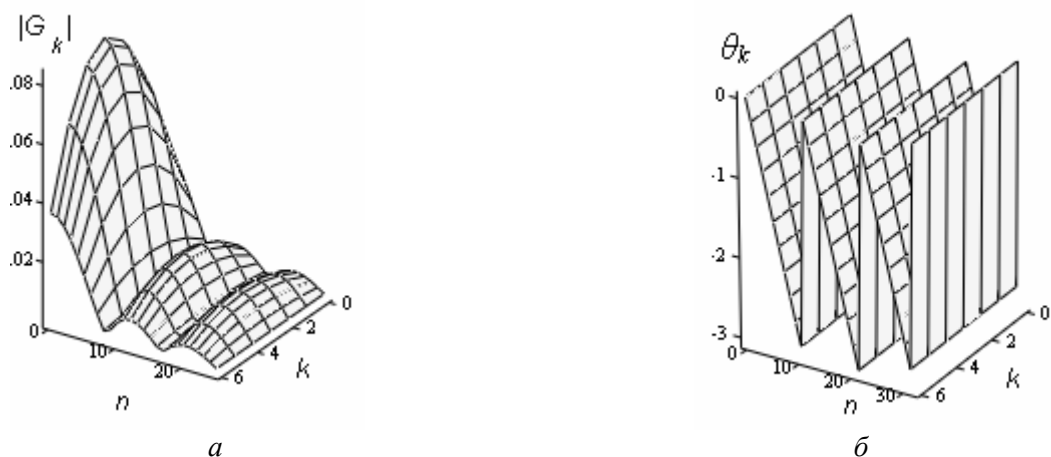


Рис. 5

Итак, получены выражения для определения авто-, взаимных и кросс-спектральных плотностей мощности скользящих упорядоченных выборок из случайного некоррелированного сигнала с непрерывными состояниями и дискретным временем, которые завершают описание вероятностной структуры процесса и из которых могут быть получены значения функции когерентности в зависимости от частоты [7]. Это позволит определить возможность представления рассматриваемого метода преобразования измерительной информации в виде линейной (линеаризованной) системы с одним входом и несколькими выходами. В этом случае из спектральных характеристик могут быть найдены аналитические выражения передаточных функций и синтезирована структура алгоритма преобразования данных скользящими упорядоченными выборками, которые предоставят новые возможности для синтеза цифровых фильтров с робастными свойствами при редактировании неправдоподобных данных.

1. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
2. Кендалл М., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
3. Мазманян Р.О. Корреляционные функции упорядоченных выборок случайного некоррелированного сигнала. // Техн. електродинаміка. – 2005. – № 1. – С. 71–78.
4. Мазманян Р.О. О некоторых свойствах медианных преобразователей измерительной информации // Техн. електродинаміка. – 2003. – №6. – С. 70–75.
5. Мазманян Р.О. Характеристики упорядоченных выборок случайного некоррелированного сигнала // Техн. електродинаміка. – 2004. – № 6. – С. 60–64.
6. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир. – 1990. – 584 с.
7. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. – М.: Мир. – 1982. – 428 с.

Надійшла 01.04.09