

УДК 621.3.011.74.005

Н.А.Шидловська, чл.-кор. НАН України (Ін-т електродинаміки НАН України, Київ),
В.Г.Самойленко, докт.фіз.-мат.наук (Нац. ун-т ім. Т.Шевченка, Київ), **О.П.Кравченко**, канд.техн.
 наук (Ін-т електродинаміки НАН України, Київ)

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ РОЗРЯДНИХ КІЛ

Запропоновано алгоритм побудови наближеного розв'язку нелінійного диференціального рівняння, що описує процеси в нелінійному розрядному колі. Проаналізовано особливості перебігу процесів у колі в залежності від того, який з його елементів є нелінійним.

Предложен алгоритм построения приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения, которое описывает процессы в нелинейной разрядной цепи. Проанализированы особенности процессов, происходящих в цепи, в зависимости от того, какой из элементов является нелинейным.

Вивчення нелінійних електричних кіл пов'язано з пошуком аналітичних методів, які можна застосувати для рішення відповідних задач [5], оскільки наявність нелінійності в електричному колі привносить суттєві особливості в перебіг процесів, що відбуваються [3,4].

Авторами розроблено оригінальний аналітичний метод, який викладено у статті [1]. Запропонований метод розрахунку процесів в слабо нелінійних коливальних колах з втратами ґрунтується на розкладанні розв'язків слабо нелінійної системи по розв'язках незбуреної (породжуючої) системи [1]. Основна перевага запропонованого методу полягає в тому, що завдяки спеціальній заміні змінних відбувається перехід від нелінійного рівняння другого порядку до системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, що значно розширює клас задач, які можуть бути досліджені за його допомогою.

Метою даної роботи є аналіз особливостей поведінки струму та заряду в послідовному RLC -колі. Розглянуто три розрядних кола, в яких нелінійним почергово вважається один із елементів, а решта – лінійні.

При вивченні розрядних кіл з одним нелінійним елементом доводиться розв'язувати диференціальне рівняння, одержане за законом Кірхгофа,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = \varepsilon F\left(q, \frac{dq}{dt}\right). \quad (1)$$

Тут $2\delta = R/L$, $\omega^2 = (LC)^{-1}$, q – величина заряду на конденсаторі, L – індуктивність, що відповідає лінійному випадку, C – ємність конденсатора, R – опір, ε – малий параметр.

Зазначимо, що вигляд нелінійної функції F в правій частині рівняння (1) визначається особливостями конкретного кола. Рівняння (1) описує затухаючий процес, оскільки характеристичні корені $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ незбуреного (при $\varepsilon = 0$) рівняння мають від'ємні дійсні частини.

Для побудови наближеного розв'язку рівняння (1) виконується заміна незалежної змінної

$$x_1 = q, \quad x_2 = dq/dt = \dot{x}_1, \quad (2)$$

і рівняння (1) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\delta \dot{x}_1 - \omega^2 x_1 + \varepsilon F(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3)$$

яку можна записати наступним чином:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon F(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

або

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x), \quad (5)$$

де $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(x_1, x_2) \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Виконаємо заміну змінних:

$$x = Sy, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а саме $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$.

Тоді з урахуванням (6) рівняння (5) перетвориться до вигляду

$$\dot{x} = S\dot{y} = ASy + \varepsilon f(Sy), \quad (7)$$

звідки одержуємо систему рівнянь

$$\dot{y} = (S^{-1}AS)y + \varepsilon S^{-1}f(Sy), \quad (8)$$

де $S^{-1}AS = W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Позначимо

$$\varepsilon H(y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon S^{-1}F(Sx) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon S^{-1}F(y_1 + y_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon H_1(y) \\ \varepsilon H_2(y) \end{pmatrix}.$$

Таким чином, система рівнянь, що описує розрядний контур, має вигляд $\dot{y} = Wy + \varepsilon H(y)$

або

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 - \varepsilon H(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + \varepsilon H(y_1, y_2) \end{cases} \quad (9)$$

Тут $H(y)$ залежить від типу нелінійності в колі і буде наведено нижче.

Розв'язок системи (9) будемо шукати у вигляді

$$y = \varphi(t, z) = \begin{pmatrix} U(t, z) \\ V(t, z) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

де z – нова невідома вектор-функція змінної t .

Функції $U(t, z)$ та $V(t, z)$ зобразимо наступним чином:

$$U(t, z) = u_{10}z_1 + u_{01}z_2 + u_{20}z_1^2 + u_{11}z_1z_2 + u_{02}z_2^2 + u_{30}z_1^3 + u_{21}z_1^2z_2 + u_{12}z_1z_2^2 + u_{03}z_2^3 + \dots, \quad (11)$$

$$V(t, z) = v_{10}z_1 + v_{01}z_2 + v_{20}z_1^2 + v_{11}z_1z_2 + v_{02}z_2^2 + v_{30}z_1^3 + v_{21}z_1^2z_2 + v_{12}z_1z_2^2 + v_{03}z_2^3 + \dots, \quad (12)$$

де $u_{10}, v_{10}, \dots, u_{03}, v_{03}, \dots$ – деякі невідомі функції, залежні від змінної t , явний вигляд яких визначається рекурентним чином.

Враховуючи те, що

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (13)$$

де $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial z_1} & \frac{\partial U}{\partial z_2} \\ \frac{\partial V}{\partial z_1} & \frac{\partial V}{\partial z_2} \end{pmatrix}$, система рівнянь (9) перетвориться до вигляду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \dot{z} = W\varphi + \varepsilon H(\varphi). \quad (14)$$

Беручи до уваги умову $\det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \neq 0$, невідомі функції $U(t, z), V(t, z)$ будемо визначати так, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = W\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} Wz + \varepsilon H(\varphi). \quad (15)$$

Зауважимо, що співвідношення (15) забезпечують можливість зведення системи (9) до лінійної системи $\dot{z} = Wz$, загальний розв'язок якої має вигляд

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (16)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з відповідних початкових умов.

Враховуючи вирази (11) і те, що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_{10}}{dt} z_1 + \frac{du_{01}}{dt} z_2 + \frac{du_{20}}{dt} z_1^2 + \frac{du_{11}}{dt} z_1 z_2 + \frac{du_{02}}{dt} z_2^2 + \dots \\ \frac{dv_{10}}{dt} z_1 + \frac{dv_{01}}{dt} z_2 + \frac{dv_{20}}{dt} z_1^2 + \frac{dv_{11}}{dt} z_1 z_2 + \frac{dv_{02}}{dt} z_2^2 + \dots \end{pmatrix}, \quad (17)$$

рівняння системи (15) набудуть наступного вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{du_{10}}{dt} z_1 + \frac{du_{01}}{dt} z_2 + \frac{du_{20}}{dt} z_1^2 + \frac{du_{11}}{dt} z_1 z_2 + \frac{du_{02}}{dt} z_2^2 + \frac{du_{30}}{dt} z_1^3 + \frac{du_{21}}{dt} z_1^2 z_2 + \frac{du_{22}}{dt} z_1 z_2^2 + \frac{du_{03}}{dt} z_2^3 = \\ & = (\lambda_1 - \lambda_2) u_{01} z_2 + \lambda_1 (u_{21} - 2u_{20}) z_1^2 - \lambda_2 u_{11} z_1 z_2 + (\lambda_1 - 2\lambda_2) u_{02} z_2^2 - 2\lambda_1 u_{30} z_1^3 - \\ & \quad - (\lambda_1 + \lambda_2) u_{21} z_1^2 z_2 - 2\lambda_2 u_{12} z_1 z_2^2 + (\lambda_1 - 3\lambda_2) u_{03} z_2^3 + \varepsilon H_1(y), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dv_{11}}{dt} z_1 + \frac{dv_{12}}{dt} z_2 + \frac{dv_{21}}{dt} z_1^2 + \frac{dv_{22}}{dt} z_1 z_2 + \frac{dv_{23}}{dt} z_2^2 + \frac{dv_{31}}{dt} z_1^3 + \frac{dv_{32}}{dt} z_1^2 z_2 + \frac{dv_{33}}{dt} z_1 z_2^2 + \frac{dv_{34}}{dt} z_2^3 = \\ & = (\lambda_2 - \lambda_1) v_{10} z_1 + (\lambda_2 - 2\lambda_1) v_{20} z_1^2 - \lambda_1 v_{11} z_1 z_2 - \lambda_2 v_{02} z_2^2 + (\lambda_2 - 3\lambda_1) v_{30} z_1^3 - 2\lambda_1 v_{21} z_1^2 z_2 - \\ & \quad - (\lambda_1 + \lambda_2) v_{12} z_1 z_2^2 - 2\lambda_2 v_{03} z_2^3 + \varepsilon H_2(y). \end{aligned} \quad (19)$$

де $H_1(y)$ та $H_2(y)$ відповідно залежать від типу і вигляду характеристики нелінійного елемента і мають бути записані з урахуванням (10), (11).

Невідомі функції $u_{10}, u_{01}, v_{10}, v_{01}, u_{20}, u_{11}, u_{02}, v_{20}, v_{11}, v_{02}, \dots$ визначаються з рівнянь, які отримують з (18), (19) шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях z_1, z_2 в лівій і правій частинах співвідношень (18), (19).

Необхідно відзначити, що функції $u_{10}, v_{10}, \dots, u_{03}, v_{03}$ набувають однакового вигляду значення для послідовного RLC -кола незалежно від того, який з елементів є нелінійним, і визначаються як частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь (18), (19)

$$u_{10} = 1, \quad u_{01} = 0, \quad v_{10} = 0, \quad v_{01} = 1, \quad u_{20} = u_{11} = u_{02} = 0, \quad v_{20} = v_{11} = v_{02} = 0. \quad (20)$$

Подальший аналіз проведемо з урахуванням особливостей нелінійних елементів і знайдемо наближені розв'язки системи (9) для кожного виду нелінійного розрядного кола.

1. Для кола, що містить **нелінійну індуктивність** з феромагнітним осердям, що описується співвідношенням [5]

$$\psi = L \frac{dq}{dt} - \varepsilon \left(\frac{dq}{dt} \right)^3, \quad (21)$$

з урахуванням закону Кірхгофа можна записати

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = -\varepsilon \frac{3}{L} \left[\frac{R}{L} \left(\frac{dq}{dt} \right)^3 + \frac{q}{LC} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \right]. \quad (22)$$

Застосуємо для такого кола описану вище методику. Функції $H_1(y)$ та $H_2(y)$ при такому типі нелінійної залежності набувають вигляду відповідно:

$$\begin{aligned} H_1(y) = & \frac{r}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ (\lambda_1 u_{10} + \lambda_2 v_{10})^2 (\lambda_1^2 u_{10} + \lambda_2^2 v_{10}) z_1^3 + (\lambda_1 u_{01} + \lambda_2 v_{01})^2 (\lambda_1^2 u_{01} + \lambda_2^2 v_{01}) z_2^3 + \right. \\ & + (\lambda_1 u_{10} + \lambda_2 v_{10}) z_1^2 z_2 \left[3\lambda_1^3 u_{10} u_{01} + 3\lambda_2^3 v_{10} v_{01} + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 + 2\lambda_1) u_{10} v_{01} + \right. \\ & + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + 2\lambda_2) v_{10} u_{01} \left. \right] + (\lambda_1 u_{01} + \lambda_2 v_{01}) z_1 z_2^2 \left[3\lambda_1^3 u_{10} u_{01} + 3\lambda_2^3 v_{10} v_{01} + \right. \\ & \left. \left. + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + 2\lambda_2) u_{10} v_{01} + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 + 2\lambda_1) v_{10} u_{01} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} H_2(y) = & \frac{-r}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ (\lambda_1 u_{10} + \lambda_2 v_{10})^2 (\lambda_1^2 u_{10} + \lambda_2^2 v_{10}) z_1^3 + (\lambda_1 u_{01} + \lambda_2 v_{01})^2 (\lambda_1^2 u_{01} + \lambda_2^2 v_{01}) z_2^3 + \right. \\ & + (\lambda_1 u_{10} + \lambda_2 v_{10}) z_1^2 z_2 \left[3\lambda_1^3 u_{10} u_{01} + 3\lambda_2^3 v_{10} v_{01} + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 + 2\lambda_1) u_{10} v_{01} + \right. \\ & + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + 2\lambda_2) v_{10} u_{01} \left. \right] + (\lambda_1 u_{01} + \lambda_2 v_{01}) z_1 z_2^2 \left[3\lambda_1^3 u_{10} u_{01} + 3\lambda_2^3 v_{10} v_{01} + \right. \\ & \left. \left. + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 + 2\lambda_1) v_{10} u_{01} + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + 2\lambda_2) u_{10} v_{01} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Функції u_{03}, v_{03}, \dots визначимо як частинні розв'язки системи диференціальних рівнянь (18), (19)

$$\begin{aligned} u_{30} &= \frac{\varepsilon r \lambda_1^3}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}, & v_{30} &= \frac{\varepsilon r \lambda_1^4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - 3\lambda_1)}, \\ u_{21} &= \frac{\varepsilon r \lambda_1^2 \lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_2 + 2\lambda_1), & v_{21} &= -\frac{\varepsilon r \lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} (\lambda_2 + 2\lambda_1), \\ u_{12} &= \frac{\varepsilon r \lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} (\lambda_1 + 2\lambda_2), & v_{12} &= -\frac{\varepsilon r \lambda_1 \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1 + 2\lambda_2), \\ u_{03} &= -\frac{\varepsilon r \lambda_2^4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - 3\lambda_2)}, & v_{03} &= -\frac{\varepsilon r \lambda_2^3}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким чином, підставляючи отримані вище значення функцій $u_{10}, v_{10}, \dots, u_{03}, v_{03}, \dots$ в (11) та враховуючи заміни (6) і (2), одержимо формули для наближеного розв'язку рівняння (21)

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} - \varepsilon \frac{r \lambda_1^3 C_1^3 e^{3\lambda_1 t}}{2(\lambda_2 - 3\lambda_1)} - \varepsilon \frac{r \lambda_2^3 C_2^3 e^{3\lambda_2 t}}{2(\lambda_1 - 3\lambda_2)} + \\ + \varepsilon \frac{r \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + 2\lambda_2)}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} C_1 C_2^2 e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t} + \varepsilon \frac{r \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 + 2\lambda_1) C_1^2 C_2 e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t}}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad (25)$$

$$\frac{dq}{dt} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} - \varepsilon \frac{3r \lambda_1^4 C_1^3 e^{3\lambda_1 t}}{2(\lambda_2 - 3\lambda_1)} - \varepsilon \frac{3r \lambda_2^4 C_2^3 e^{3\lambda_2 t}}{2(\lambda_1 - 3\lambda_2)} - \\ + \varepsilon \frac{r \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + 2\lambda_2)^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} C_1 C_2^2 e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t} + \varepsilon \frac{r \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 + 2\lambda_1)^2 C_1^2 C_2 e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t}}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (26)$$

Сталі інтегрування C_1, C_2 визначаються з початкових умов

$$q|_{t=0} = Q, \quad \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (27)$$

і мають вигляд

$$C_1 = -\frac{\lambda_2 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} + \varepsilon \frac{r \lambda_1^3 \lambda_2^2 Q^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^4} \left\{ \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 - 3\lambda_2} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \right\}, \\ C_2 = \frac{\lambda_1 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} + \varepsilon \frac{r \lambda_1^2 \lambda_2^3 Q^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^4} \left\{ \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2 - 3\lambda_1} + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \right\}.$$

2. У випадку розряду *нелінійного конденсатора* з сегнетодіелектриком, кулон-вольтна характеристика якого має вигляд [5]

$$u_C = q/C + d_3 q^3, \quad d_3 = \varepsilon - \text{малий параметр}, \quad (28)$$

процеси у колі описуються рівнянням:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} + \frac{d_3}{L} q^3 = 0. \quad (29)$$

Введемо додаткові позначення

$$k = 1/L. \quad (30)$$

Використовуючи описану вище методику з урахуванням (30), рівняння (29) можна звести до системи рівнянь (18) і (19), у яких $H(y)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} H_1(y) \\ H_2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} H(y),$$

$$H(y) = \frac{k}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ (u_{10} + v_{10})^3 z_1^3 + 3(u_{10} + v_{10})^2 (u_{01} + v_{01}) z_1^2 z_2 + \right. \\ \left. + 3(u_{10} + v_{10})(u_{01} + v_{01})^2 z_1 z_2^2 + (u_{01} + v_{01})^3 z_2^3 \right\}. \quad (31)$$

Частинними розв'язками цих диференціальних рівнянь є функції

$$\begin{aligned}
u_{30} &= -\frac{\varepsilon k}{2\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, & v_{30} &= -\frac{\varepsilon k}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - 3\lambda_1)}, \\
u_{21} &= -\frac{3\varepsilon k}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, & v_{21} &= \frac{3\varepsilon k}{2\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\
u_{12} &= -\frac{3\varepsilon k}{2\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}, & v_{12} &= \frac{3\varepsilon k}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \\
u_{03} &= \frac{\varepsilon k}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - 3\lambda_2)}, & v_{03} &= \frac{\varepsilon k}{2\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Підставляючи отримані значення функцій $u_{10}, v_{10}, \dots, u_{03}, v_{03}, \dots$ (20), (32) в (11) та враховуючи заміни (2) та (6), одержимо

$$\begin{aligned}
q &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \varepsilon \frac{kC_1^3 e^{3\lambda_1 t}}{2\lambda_1(\lambda_2 - 3\lambda_1)} + \varepsilon \frac{kC_2^3 e^{3\lambda_2 t}}{2\lambda_2(\lambda_1 - 3\lambda_2)} - \varepsilon \frac{3kC_1 C_2^2 e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t}}{2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)} - \varepsilon \frac{3kC_1^2 C_2 e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t}}{2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)}, \\
\frac{dq}{dt} &= \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + \varepsilon \frac{3kC_1^3 e^{3\lambda_1 t}}{2(\lambda_2 - 3\lambda_1)} + \varepsilon \frac{3kC_2^3 e^{3\lambda_2 t}}{2(\lambda_1 - 3\lambda_2)} - \\
&- \varepsilon \frac{3k(\lambda_1 + 2\lambda_2)C_1 C_2^2}{2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t} - \varepsilon \frac{3k(2\lambda_1 + \lambda_2)C_1^2 C_2}{2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)} e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t}.
\end{aligned} \tag{33}$$

З урахуванням початкових умов (27) сталі інтегрування мають вигляд:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{\lambda_2 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} - \varepsilon \frac{kQ^3}{2(\lambda_1 - \lambda_2)^4} \left\{ 3\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2^3}{\lambda_1} + \frac{2\lambda_1^3}{\lambda_1 - 3\lambda_2} - \frac{6\lambda_1 \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\}, \\
C_2 &= \frac{\lambda_1 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} - \varepsilon \frac{kQ^3}{2(\lambda_1 - \lambda_2)^4} \left\{ 3\lambda_2^2 + \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2} + \frac{2\lambda_2^3}{\lambda_2 - 3\lambda_1} - \frac{6\lambda_1^2 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\}.
\end{aligned}$$

3. **Нелінійність активного опору**, як правило, (коли нелінійність не лежить в основі функціонування пристрою) описується співвідношенням [2]

$$R = R_0(1 + \varepsilon i^2). \tag{34}$$

З урахуванням рівняння Кірхгофа для послідовного RLC-кола з нелінійним опором можна записати:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} + \varepsilon \frac{R}{L} \left(\frac{dq}{dt} \right)^3 = 0. \tag{35}$$

Використовуючи описану вище методику, рівняння (35) можна звести до системи рівнянь (18), (19), де $H(y)$ описується співвідношенням

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} H_1(y) \\ H_2(y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} H(y), \\
H(y) &= -\frac{2\delta}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ (\lambda_1 u_{10} + \lambda_2 v_{10})^3 z_1^3 + 3(\lambda_1 u_{10} + \lambda_2 v_{10})^2 (\lambda_1 u_{01} + \lambda_2 v_{01}) z_1^2 z_2 + \right. \\
&\quad \left. + 3(\lambda_1 u_{10} + \lambda_2 v_{10})(\lambda_1 u_{01} + \lambda_2 v_{01})^2 z_1 z_2^2 + (\lambda_1 u_{01} + \lambda_2 v_{01})^3 z_2^3 \right\},
\end{aligned} \tag{36}$$

а функції $u_{30}, v_{30}, \dots, u_{03}, v_{03}, \dots$ мають вигляд

$$u_{30} = -\frac{\varepsilon\delta\lambda_1^2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad v_{30} = -\frac{2\varepsilon\delta\lambda_1^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - 3\lambda_1)}, \quad u_{21} = -\frac{6\varepsilon\delta\lambda_1^2\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad v_{21} = \frac{3\varepsilon\delta\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$u_{12} = -\frac{3\varepsilon\delta\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad v_{12} = \frac{6\varepsilon\delta\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad u_{03} = \frac{2\varepsilon\delta\lambda_2^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - 3\lambda_2)}, \quad v_{03} = \frac{\varepsilon\delta\lambda_2^2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$
(37)

Тоді, аналогічно з попереднім випадком, підставляючи (20) і (37) в (10) і (11) та враховуючи заміни (2) і (6), маємо

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \varepsilon \frac{\delta\lambda_1^2 C_1^3 e^{3\lambda_1 t}}{\lambda_2 - 3\lambda_1} + \varepsilon \frac{\delta\lambda_2^2 C_2^3 e^{3\lambda_2 t}}{\lambda_1 - 3\lambda_2} - \varepsilon \frac{3\delta\lambda_1\lambda_2 C_1 C_2^2 e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2} - \varepsilon \frac{3\delta\lambda_1\lambda_2 C_1^2 C_2 e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2};$$
(38)

$$\frac{dq}{dt} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + \varepsilon \frac{3\delta\lambda_1^3 C_1^3 e^{3\lambda_1 t}}{\lambda_2 - 3\lambda_1} + \varepsilon \frac{3\lambda_2^3 C_2^3 e^{3\lambda_2 t}}{\lambda_1 - 3\lambda_2} -$$

$$- \varepsilon \frac{3\delta\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + 2\lambda_2)C_1 C_2^2 e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2} - \varepsilon \frac{3\delta\lambda_1\lambda_2(2\lambda_1 + \lambda_2)C_1^2 C_2 e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$
(39)

Сталі інтегрування для рівнянь (38), (39) знаходимо з початкових умов (27)

$$C_1 = -\frac{\lambda_2 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} - \varepsilon \frac{3\delta\lambda_1^2 \lambda_2^2 Q^3}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1 - 3\lambda_2)}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1 Q}{\lambda_1 - \lambda_2} - \varepsilon \frac{3\delta\lambda_1^2 \lambda_2^2 Q^3}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_2 - 3\lambda_1)}.$$

Для порівняння впливу нелінійностей різних елементів кола на процеси в ньому побудовано графіки залежностей струму від часу (рис.1–3). Величина малого параметру нелінійних характеристик вибиралась виходячи із співвідношення між лінійною та нелінійною складовими

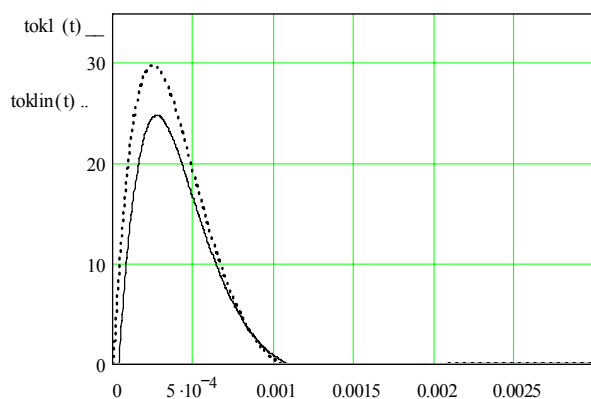


Рис. 1

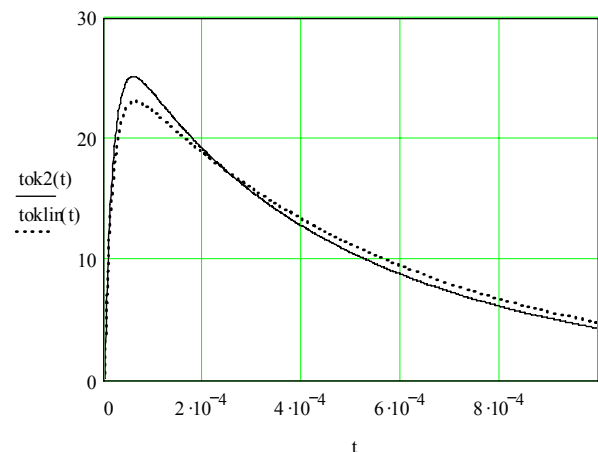


Рис. 2

$k = \frac{R_n}{R_l} = \frac{\psi_n}{\psi_l} = \frac{Q_n}{Q_l} = 0,09$. На всіх графіках неперервною лінією відображено струм у нелінійному колі, пунктирною – у лінійному. При нелінійній індуктивності (рис.1) нелінійність призводить до зменшення екстремуму струму та уповільнення його спаду, на що вказує перетин спадаючих частин

характеристик. Крім того, крутизна наростання характеристик для лінійного випадку значно більша порівняно з нелінійним випадком.

У випадку присутньої у колі нелінійної ємності (рис. 2) нелінійність навпаки збільшує максимум струму порівняно з лінійним випадком, та прискорює його спадання (на графіку наявна точка перетину його характеристик), при цьому крутизна наростання струму у нелінійному випадку більша.

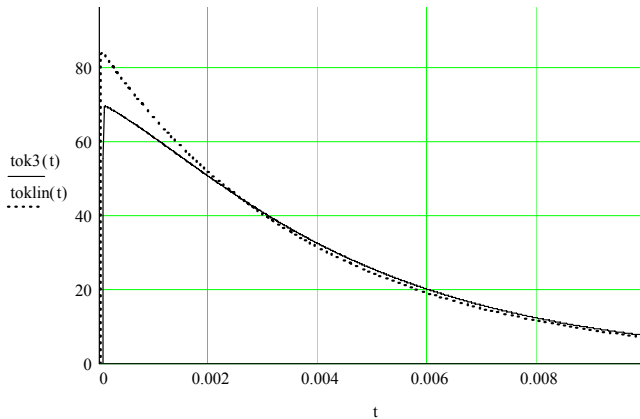


Рис. 3

в залежності від того, який з його елементів нелінійний.

Рис. 3 демонструє процеси у колі при наявності нелінійного опору. Як і у випадку нелінійної індуктивності, нелінійність призводить до завищення екстремуму струму, зменшення крутизни його наростання та незначного зниження швидкості його спадання. Зазначимо, що для всіх трьох випадків момент настання екстремумів фактично співпадає.

Висновки. Таким чином, за допомогою оригінального аналітичного методу проаналізовано кола розряду конденсатора на індуктивно-активне навантаження при по черговій нелінійності усіх елементів кола за умови лінійності останніх. На графіках, що побудовані на основі одержаних розрахунків, наочно показано поведінку струму у колі

1. Потороча В.В., Кравченко О.П., Самойленко В.Г., Шидловська Н.А. Побудова наближених розв'язків слабо збурених диференціальних рівнянь теорії нелінійних електричних кіл // В зб.: Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Чернівці, 2006. – №14. – С.168–175.

2. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. – М.: Энергия, 1976. – 496 с.

3. Шидловська Н.А., Кравченко О.П. Аналіз помилки, що виникає в разі заміни нелінійної індуктивності лінійною при резонансі напруг // Праці Ін-ту електродинаміки НАН України. Електроенергетика. – 2005. – №3(12). – С. 3–8.

4. Шидловська Н.А., Кравченко О.П., Самойленко О.П. Дослідження процесів в нелінійних коливальних колах за допомогою методу усереднення Боголюбова // Техн. електродинаміка. – 2008. – № 1. – С. 3–7.

5. Шидловська Н.А., Самойленко В.Г. Про деякі задачі нелінійної електротехніки і математичні методи їх дослідження // Техн. електродинаміка. – 2008. – №5. – С.3–11.

6. Шидловська Н.А., Кравченко О.П., Самойленко В.Г., Кучерява І.М. Порівняльний аналіз аналітичного та чисельного методів розрахунку процесів у нелінійному електричному колі // Техн. електродинаміка. – 2009. – №1. – С. 3–6.

Надійшла 14.04.09