

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ НАПРУГИ ВЗДОВЖ ОБВИТОК ТРАНСФОРМАТОРА ЗА ДІЇ НА НИХ ІМПУЛЬСНИХ ПЕРЕНАПРУГ

М.С.Сегеда<sup>1</sup>, докт.техн.наук, Є.В.Черемних<sup>1</sup>, докт.фіз.-мат.наук, І.В.Хімюк<sup>2</sup>, канд.техн.наук,  
Т.А.Мазур<sup>1</sup>, О.М.Курулишин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> – Національний університет «Львівська політехніка»,

вул. С.Бандери, 12, Львів, 79005, Україна.

Е-mail: [mseheda@ukr.net](mailto:mseheda@ukr.net)

<sup>2</sup> – Інститут електродинаміки НАН України,

пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна.

*Запропоновано математичну модель для дослідження хвильових процесів в обмотках трансформатора. Для розв'язання інтегрально-диференціальних рівнянь запропоновано метод розділення змінних. Досліджено розподіл напруги в обмотках трансформатора за дії на них імпульсних перенапруг. Бібл. 5, рис. 1.*

**Ключові слова:** обмотка трансформатора, математичне моделювання, імпульсна перенапряга, часткові похідні, початкові умови, граничні умови.

**Вступ.** Питання дослідження перенапруг в обмотках трансформаторів під час дії на них імпульсних перенапруг розглянуто у багатьох публікаціях як вітчизняних, так і закордонних [1–5]. У даній статті запропоновано математичну модель обмотки трансформатора з урахуванням струмів впливу між витками відносно землі та взаємоіндукції між витками. Розв'язання рівнянь у часткових похідних, які описують хвильові процеси в обмотках трансформаторів, здійснюється методом розділення змінних. Розроблення математичних моделей для дослідження хвильових процесів у обмотках трансформаторів з урахування цих факторів є актуальним.

Надійність ізоляції трансформаторів під час дії на їхні обмотки імпульсних перенапруг має визначальне значення та залежить від правильної її координації. Ізоляція високовольтних трансформаторів повинна забезпечувати їхню безаварійну роботу як під час довготривалої дії напруги, так і під час короткотривалих зовнішніх і внутрішніх перенапруг.

**Мета роботи.** Розроблення математичної моделі для дослідження хвильових процесів в обмотках трансформаторів, розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних методом розділення змінних та дослідження хвильових процесів в обмотках трансформаторів за дії на них імпульсних перенапруг.

**Математична модель.** Для дослідження хвильових процесів у трансформаторах за дії на обмотки трансформаторів імпульсу перенапруги необхідно змоделювати форму імпульсу хвилі. Для цього використовуємо відоме емпіричне рівняння

$$e_{\text{вм}} = E(e^{-at} - e^{-bt}), \quad (1)$$

де  $E$  – максимальна величина потенціалу хвилі;  $a$  і  $b$  – параметри хвилі;  $t$  – час.

Рівняння, яке описує хвильові процеси в обмотках трансформатора [1–3], має вигляд

$$\begin{aligned} -L_0 C_{M0} \partial^4 u(x, t) / (\partial x^2 \partial t^2) - r_0 C_{M0} \partial^3 u(x, t) / (\partial x^2 \partial t) + L_0 C_0 \partial^2 u(x, t) / \partial t^2 - \\ - \partial^2 u(x, t) / \partial x^2 + (r_0 C_0 + L_0 g_0) \partial u(x, t) / \partial t + r_0 g_0 u(x, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $r_0$ ,  $g_0$ ,  $L_0$ ,  $C_0$ ,  $C_{M0}$  – відповідно активний опір, активна провідність відносно землі, індуктивність, ємність відносно землі, ємність вздовж осі заступної схеми обмотки трансформатора на одиницю довжини [1].

Для розв'язання рівняння (2) використаємо метод розділення змінних. Уведемо позначення  $a = L_0 C_{M0}$ ,  $b = r_0 C_{M0}$ ,  $c = L_0 C_0$ ,  $h = r_0 C_0 + L_0 g_0$ ,  $s = r_0 g_0$ . Тоді

$$-a \partial^4 u(x, t) / (\partial x^2 \partial t^2) - b \partial^3 u(x, t) / (\partial x^2 \partial t) + c \partial^2 u(x, t) / \partial t^2 - \partial^2 u(x, t) / \partial x^2 + h \partial u(x, t) / \partial t + s u(x, t) = 0. \quad (3)$$

Початкові та граничні умови

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = u_0(x) = 0, \quad x \in (0, l); \quad (4)$$

$$\partial u(x, t) / \partial t \Big|_{t=0} = u_1(x) = 0; \quad u(x, t) \Big|_{x=0} = f_0(t) = e_{\text{вм}}(t), \quad t > 0; \quad u(x, t) \Big|_{x=l} = f_1(t) = 0. \quad (5)$$

Узгодженість умов

$$f_0(t)|_{t=0} = u_0(x)|_{x=0}, \quad f_1(t)|_{t=0} = u_1(x)|_{x=l}, \quad df_0(t)/dt|_{t=0} = u_0(0)|_{t=0}, \quad df_1(t)/dt|_{t=0} = u_1(l)|_{t=0}.$$

Шукаємо функції  $A(t)$  та  $B(t)$ , щоб заміна

$$u(x, t) = V(x, t) + A(t) + xB(t), \quad (6)$$

дала для  $V(x, t)$  однорідні умови (5), тобто

$$V(x, t)|_{x=0} = 0; \quad V(x, t)|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Тоді згідно з (6)  $u(x, t)|_{x=0} = V(x, t)|_{x=0} + A(t) = f_0(t)$  та  $u(x, t)|_{x=l} = V(x, t)|_{x=l} + A(t) + lB(t) = f_1(t)$ ,

звідки  $A(t) = f_0(t) = e_{imn}(t)$  та  $B(t) = l^{-1}(f_1(t) - f_0(t)) = -l^{-1}f_0(t) = -l^{-1}e_{imn}(t)$ .

Замість початкових умов (4) виникають умови

$$u(x, t)|_{t=0} = V(x, t)|_{t=0} + A(t)|_{t=0} + xB(t)|_{t=0} \equiv u_0(x); \quad (8)$$

$$\partial u(x, t)/\partial t|_{t=0} = \partial V(x, t)/\partial t|_{t=0} + dA(t)/dt|_{t=0} + xdB(t)/dt|_{t=0} \equiv u_1(x). \quad (9)$$

Звідси  $V(x, t)|_{t=0} = u_0(x) - A(t)|_{t=0} - xB(t)|_{t=0} = -A(t)|_{t=0} - xB(t)|_{t=0} \equiv V_0(x); \quad (10)$

$$\partial V(x, t)/\partial t|_{t=0} = u_1(x) - dA(t)/dt|_{t=0} - xdB(t)/dt|_{t=0} = -dA(t)/dt|_{t=0} - xdB(t)/dt|_{t=0} \equiv V_1(x). \quad (11)$$

Рівняння для змінної  $V(x, t)$  одержуємо, підставляючи (6) в (3), тобто

$$-a\partial^4 V(x, t)/(\partial x^2 \partial t^2) - b\partial^3 V(x, t)/(\partial u^2 \partial t) + c(\partial^2 V(x, t)/\partial t^2 + d^2 A(t)/dt^2 + xd^2 B(t)/dt^2) - \partial^2 V(x, t)/\partial x^2 + h(\partial V(x, t)/\partial t + dA(t)/dt + xdB(t)/dt) + s(V(x, t) + A(t) + xB(t)) = 0$$

чи

$$-a\partial^4 V(x, t)/(\partial x^2 \partial t^2) - b\partial^3 V(x, t)/(\partial x^2 \partial t) + c\partial^2 V(x, t)/\partial t^2 - \partial^2 V(x, t)/\partial x^2 + h\partial V(x, t)/\partial t + sV(x, t) = F(x, t), \quad (12)$$

де  $F(x, t) = -cd^2 A(t)/dt^2 - cxd^2 B(t)/dt^2 - hdA(t)/dt - hxdB(t)/dt - sA(t) - sxB(t)$  – відома частина рівняння.

Враховуючи (7), шукаємо розв'язок  $V(x, t)$  у вигляді

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{100} C_k(t) \sin(\pi kx/l), \quad 0 < x < l. \quad (13)$$

Для знаходження початкових умов функції  $C_k(t)|_{t=0}$  використаємо розклади в інтервалі  $[0; l]$  функцій 1 та  $x$ , тобто

$$1 = -\frac{2}{\pi} \sum_k^{\infty} \frac{\sin((\pi kx)/l)}{k} ((-1)^k - 1); \quad x = \frac{2l}{\pi} \sum_k^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin((\pi kx)/l)}{k}. \quad (14, 15)$$

Підставляємо (13) – (14) у (10) і (11), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{100} C_k(t) \sin(\pi kx/l) = A(t)|_{t=0} \frac{2}{\pi} \sum_k^{\infty} \frac{\sin((\pi kx)/l)}{k} ((-1)^k - 1) - B(t)|_{t=0} \frac{2l}{\pi} \sum_k^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin((\pi kx)/l)}{k}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{100} dC_k(t)/dt|_{t=0} \sin(\pi kx/l) = \\ & = dA(t)/dt|_{t=0} \frac{2}{\pi} \sum_k^{\infty} \frac{\sin((\pi kx)/l)}{k} ((-1)^k - 1) - dB(t)/dt|_{t=0} \frac{2l}{\pi} \sum_k^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin((\pi kx)/l)}{k}. \end{aligned} \quad (17)$$

З (16) і (17) знаходимо початкові умови функції  $C_k(t)|_{t=0}$

$$C_k(t)|_{t=0} = A(t)|_{t=0} \frac{((-1)^k - 1) 2}{k \pi} - B(t)|_{t=0} \frac{2l (-1)^{k+1}}{\pi k}; \quad (18)$$

$$dC_k(t)/dt|_{t=0} = dA(t)/dt|_{t=0} \frac{((-1)^k - 1) 2}{k \pi} - dB(t)/dt|_{t=0} \frac{2l (-1)^{k+1}}{\pi k} \quad (19)$$

$$\text{чи} \quad C_k(t)|_{t=0} = -2\pi^{-1}k^{-1} f_0(t)|_{t=0}; \quad dC_k(t)/dt|_{t=0} = -2\pi^{-1}k^{-1} df_0(t)/dt|_{t=0}. \quad (20,21)$$

Рівняння для функції  $C_k(t)$  одержуємо підставленням (6) у (3)

$$\sum_k^{100} a_1 d^2 C_k(t)/dt^2 + b_1 dC_k(t)/dt + c_1 C_k(t) \sin((\pi kx)/l) = F(x, t), \quad (22)$$

де  $a_1 = (\pi k/l)^2 + c$ ;  $b_1 = (\pi k/l)^2 + h$ ;  $c_1 = (\pi k/l)^2 + s$ .

Розкладемо праву частину рівняння (12) у ряд Фур'є

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{100} \gamma_k(t) \sin(\pi kx/l), \quad (23)$$

$$\text{тоді з (22) отримуємо} \quad a_1 d^2 C_k(t)/dt^2 + b_1 dC_k(t)/dt + c_1 C_k(t) = \gamma_k(t). \quad (24)$$

Позначимо через  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  корені характеристичного рівняння  $a_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1 = 0$  рівняння (24). Розв'язки рівняння (24) шукаємо у вигляді

$$C_k(t) = B_1(t)e^{\lambda_1 t} + B_2(t)e^{\lambda_2 t}. \quad (25)$$

Для обчислення коефіцієнтів  $B_1$  і  $B_2$  складаємо систему рівнянь

$$dB_1(t)/dte^{\lambda_1 t} + dB_2(t)/dte^{\lambda_2 t} = 0; \quad dB_1(t)/dt \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + dB_2(t)/dt \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = a_1^{-1} \gamma_k(t), \quad (26)$$

з якої знаходимо  $dB_1(t)/dt$  і  $dB_2(t)/dt$ , а  $B_1(t)$  і  $B_2(t)$  знаходимо шляхом інтегрування такі, що  $B_1(t)|_{t=0} = B_2(t)|_{t=0} = 0$ , тобто

$$B_1(t) = \int_0^t dB_1(t)/dt + K_1; \quad B_2(t) = \int_0^t dB_2(t)/dt + K_2, \quad (27)$$

де  $K_1$  і  $K_2$  – постійні інтегрування.

$$\text{Тоді} \quad C_k(t) = (B_1(t) + K_1)e^{\lambda_1 t} + (B_2(t) + K_2)e^{\lambda_2 t}; \quad (28)$$

$$dC_k(t)/dt = dB_1(t)/dte^{\lambda_1 t} + dB_2(t)/dte^{\lambda_2 t} + (B_1(t) + K_1)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + (B_2(t) + K_2)\lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (29)$$

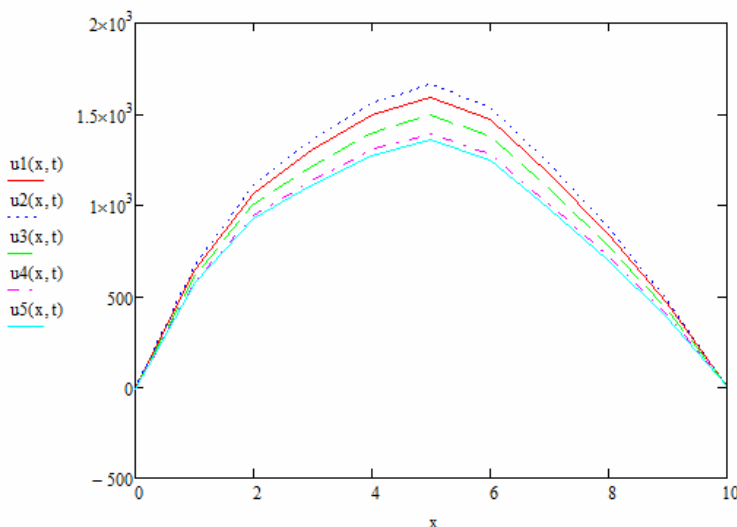
З рівнянь (28) і (29) з врахуванням (20) і (21) для  $t=0$  знаходимо  $K_1$  і  $K_2$

$$K_1 + K_2 = C_k(t)|_{t=0} = -2\pi^{-1}k^{-1} f_0(t)|_{t=0}; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 &= dC_k(t)/dt|_{t=0} - dB_1(t)/dt|_{t=0} - dB_2(t)/dt|_{t=0} = \\ &= -2\pi^{-1}k^{-1} df_0(t)/dt|_{t=0} - dB_1(t)/dt|_{t=0} - dB_2(t)/dt|_{t=0}. \end{aligned} \quad (31)$$

Розкладаючи  $V(x, t)$  у ряд Фур'є, знайшовши за (28)  $C_k(t)$ , отримуємо

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{100} C_k(t) \sin(\pi kx/l), \quad 0 < x < l. \quad (32)$$



У результаті знаходимо розв'язок рівняння (3) за рівнянням (6).

Розподіл напруги вздовж обмотки трансформатора для різного часу показано на рисунку. Зі зміною часу амплітуда зростає.

**Висновок.** Отриманий математичний апарат дозволяє досліджувати хвильові процеси в обмотках трансформаторів із врахуванням залежності напруги і струму від відстані і часу. Під час дослідження хвильових процесів в обмотках трансформаторів необхідно враховувати співвідношення між інтервалом часу поширення електромагнітних хвиль уздовж усієї довжини

обмотки та інтервалом часу, упродовж якого струм і напруга змінюються значніше від їхньої повної зміни у процесі, що розглядається.

1. Бьюлей Л.В. Волновые процессы в линиях передачи и трансформаторах. – М.-Л.: ОНТИ, 1938. – 288 с.
2. Кириленко О.В., Сегада М.С., Буткевич О.Ф., Мазур Т.А. Математичне моделювання в електроенергетиці. – Львів, 2013. – 608 с.
3. Сегада М.С. Математичне моделювання хвильових процесів у трансформаторах // Техн. електродинаміка. – 2002. – № 3. – С. 47 – 49.
4. Сегада М.С., Черемних Є.В., Мазур Т.А. Математичне моделювання вільних коливань напруги в обмотках трансформаторів з урахуванням взаємодуції між витками під час імпульсних перенапруг // Науковий вісник Національного гірничого університету. – 2013. – № 1(133). – С. 68 – 76.
5. Electrical Transient Interaction between Transformers and The Power System. – CIGRE, April 2014. – 143 p.

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ ВДОЛЬ ОБМОТОК ТРАНСФОРМАТОРА ВО ВРЕМЯ ДЕЙСТВИЯ НА НИХ ИМПУЛЬСНЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ

М.С.Сегада<sup>1</sup> докт.техн.наук, Е.В.Черемных<sup>1</sup>, докт.физ.-мат.наук, И.В.Химиук<sup>2</sup> канд.техн.наук, Т.А.Мазур<sup>1</sup>, А.М.Курульшин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> – Национальный университет «Львовская политехника»,

ул. С.Бандеры, 12, Львов, 79005, Украина.

E-mail: [mshedda@ukr.net](mailto:mshedda@ukr.net)

<sup>2</sup> – Институт электродинамики НАН Украины,  
пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина.

*Предложено математическую модель для исследования волновых процессов в обмотках трансформатора. Для решения интегрально-дифференциальных уравнений предложено метод разделения переменных. Исследовано распределение напряжения в обмотках трансформатора во время действия на них импульсных перенапряжений. Библ. 5, рис. 1.*

**Ключевые слова:** обмотка трансформатора, математическое моделирование, импульсное перенапряжение, частные производные, начальные условия, граничные условия.

#### MATHEMATICAL MODELLING OF STRESS DISTRIBUTION ALONG THE WINDING TRANSFORMERS UNDER THE IMPULSE SURGES

M.S.Scheda<sup>1</sup>, Ye.V.Cheremnykh<sup>1</sup>, I.V.Khimiuk<sup>2</sup>, T.A.Mazur<sup>1</sup>, A.M.Kurulyshin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> – National University “Lvivska Politechnika”,

Bandera Str. 12, Lviv, 79005, Ukraine.

E-mail: [mshedda@ukr.net](mailto:mshedda@ukr.net)

<sup>2</sup> – Institute of Electrodynamics the National Academy of Sciences of Ukraine,  
pr. Peremohy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine.

*A mathematic model for the investigation of the wave processes in the windings of the transformer was suggested. The method of separation of variables was used for solving the integral-differential equations. Stress distribution along the windings under the impulse surges was studied. References 5, figure 1.*

**Keywords:** windings of the transformer, mathematical modelling, impulse surges, partial derivatives, initial conditions, boundary conditions.

1. Bewley L.V. Traveling Waves on Transmission Systems. – Moskva-Leningrad: ONTI, 1938. – 288 p. (Rus)
2. Kyrylenko O.V., Schedda M.S., Butkevych O.F., Mazur T.A. Mathematical Modeling in Electric Power Engineering. – Lviv, 2013. – 608 p. (Ukr)
3. Schedda M.S. Mathematical Modeling of Wave Processes in Transformers // Tekhnichna Elektrodynamika. – 2002. – No 3. – Pp. 47–49. (Ukr)
4. Schedda M.S., Cheremnykh Ye.V., Mazur T.A. Mathematical Modeling of Free Voltage Oscillations on Transformer Windings Taking into Account Mutual Induction under Surge Overvoltages // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. – 2013. – No 1(133). – Pp. 68–76. (Ukr)
5. Electrical Transient Interaction between Transformers and The Power System. – CIGRE, April 2014. – 143 p.

Надійшла 18.04.2015

Остаточний варіант 10.05.2015