

Трёхмерное моделирование неоднородных электрических полей в открытых областях с применением метода поглощающих граничных условий

Обоснована целесообразность применения метода поглощающих граничных условий для трёхмерного моделирования и численного расчёта конечно-разностными методами трёхмерных низкочастотных электрических полей в открытых областях. Рассмотрен случай расположения источника поля внутри расчетной области, соответствующий традиционному использованию метода хорошо согласованных слоев. Предложен способ применения поглощающих граничных условий в случае расположения источника поля вне расчетной области — когда исследуемый объект сложной формы находится во внешней однородном электрическом поле, а внутри и вне объекта образуется неоднородное электрическое поле сложной конфигурации.

Обґрунтовано доцільність застосування методу поглинаючих граничних умов для тривимірного моделювання та чисельного розрахунку кінцево-різницевою методикою тривимірних низькочастотних електричних полів у відкритих областях. Розглянуто випадок розташування джерела поля усередині розрахункової області, що відповідає традиційному використанню методу добре погоджених шарів. Запропоновано спосіб застосування поглинаючих граничних умов у випадку розташування джерела поля поза розрахунковою областю — коли досліджуваний об'єкт складної форми перебуває у зовнішньому однорідному електричному полі, а всередині і зовні об'єкту створюється неоднорідне електричне поле складної конфігурації.

Введение. Использование метода конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов наиболее целесообразно при расчете электрических полей (ЭП) в так называемых замкнутых (закрытых) областях [1], что обусловлено необходимостью задания условий для потенциалов или напряженностей на границах расчетной области. На практике приходится решать задачи моделирования и анализа неоднородных электрических полей в открытых областях. При использовании конечно-разностных методов для таких случаев необходимо существенно увеличивать расчетную область, отодвигая ее границы от исследуемого объекта на такое расстояние, на котором их присутствие практически не влияет на точность расчетов электромагнитного поля (ЭМП). В то же время, обычно полезной является лишь информация об уровнях напряженности ЭМП в непосредственной близости и внутри исследуемого объекта. Размерность K решаемой при этом системы уравнений, особенно в трехмерном случае, оказывается чрезвычайно большой, вследствие чего задача может оказаться нереализуемой даже на самых современных вычислительных средствах.

Известно, что возникновение слабопроводящих тел других включений во внешнем низкочастотном электрическом поле приводит к возникновению в нем существенных неоднородностей. В этом случае задача расчета ЭП объекта сложной пространственной формы, расположенного в открытой области (например, человек, находящийся под линией электропередачи или гетерогенные включения в полимерной изоляции), может быть

сведена к последовательному решению ряда задач, как, например, в [2, 3]. Вначале рассчитывается распределение ЭП в расчетной области, границы которой удалены от исследуемого объекта на большое расстояние так, что напряженность на ней задана или равна 0. При этом шаг пространственной сетки выбирается достаточно большим, чтобы порядок решаемой системы уравнений, описывающей распределение ЭП, допускал численную реализацию на вычислительных средствах ($K < 10^8 \div 10^{10}$). Каждая следующая задача решается во все меньшей расчетной области и имеет все большее пространственное разрешение. Каждая предыдущая задача служит для задания граничных условий и первого приближения (если используется итерационный метод) при решении текущей задачи. Использование метода так называемых "поглощающих граничных условий" (ПГУ) позволяет исключить решение промежуточных задач, снизить порядок решаемой системы уравнений и время расчетов.

Метод поглощающих граничных условий, широко применяемый в настоящее время на Западе, был разработан специально для того, чтобы обеспечить возможность использования конечно-разностных методов для расчета ЭМП в открытых областях. Использование "поглощающих граничных условий" — метода "хорошо согласованного слоя" (ХСС) [4—6] или его наиболее современную версию — метода "однослоя хорошо согласованного слоя" (ОХСС) [7] — позволяет приблизить границы расчетной области практически вплотную к исследуемым объектам, существенно снизив тем

самым порядок решаемой системы уравнений и время расчетов. ХСС применяются для расчета распределений высокочастотных [4] и статических полей [6]. Такой же подход используется для решения задач, записанных в комплексном виде [7]. Для учета условий на бесконечности при расчете распределений электростатических полей предлагается также так называемый α -метод [6]. Предлагается целесообразным провести сравнительную оценку ОХСС и α -метода и выбрать наиболее подходящий для расчета низкочастотных и статических электрических полей.

Задачи, решаемые с использованием поглощающих граничных условий, предполагают наличие источника электромагнитного поля внутри исследуемой области. Однако в ряде случаев необходимо рассчитать распределение ЭМП в присутствии объекта, расположенного в однородном поле. Для низкочастотных ЭП это означает, что условия на границе расчетной области, достаточно удаленной от объекта, представляют собой заданную напряженность внешнего электрического поля E_0 . Для решения имеющих практическое значение задач интересным представляется расширить возможности метода поглощающих слоев и применить его к данному случаю.

Таким образом, целью работы является выбор наиболее приемлемой ПГУ-методики и ее параметров, позволяющих учесть условия на бесконечности, когда источник низкочастотного ЭП расположен внутри расчетной области, а также расширить возможности ПГУ на случай, когда объект находится во внешнем однородном ЭП.

Постановка задачи расчета распределения низкочастотного квазистационарного ЭП. Для нахождения распределения электрического поля неоднородного диэлектрического объекта, обладающего слабопроводящими параметрами (удельная проводимость не превышает единиц См/м), рассматриваемая область была разбита на ячейки-параллелепипеды. Данная разбивка произведена так, что узлы расчетной сетки (i, j, k) лежат на границах раздела сред. В пределах каждой из ячеек параметры среды полагались однородными. Для каждого узла расчетной сетки записывалось уравнение непрерывности в комплексном виде

$$\int_s j\omega\epsilon_0\bar{s}\cdot\vec{E}_n ds=0, \quad (1)$$

где $\bar{s}=1+\gamma/j\omega\epsilon_0\epsilon$; s — поверхность параллелепипеда, грани которого делят пополам расстояния между соседними узлами; ϵ, γ — соответственно относительная диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость среды; E_n — нормальная составляющая комплекса вектора напряженности электрического поля к элементу поверхности ds ; ω — круговая частота; $j=\sqrt{-1}$; $\epsilon_0=0,885\cdot 10^{-11}$ Ф/м.

Данное уравнение получено из уравнения Максвелла

$$\text{rot}\vec{A}=\gamma\vec{E}+\partial\vec{B}/\partial t$$

в результате применения операции дивергенции к его обеим частям, последующего интегрирования по объему элементарной ячейки V и замены с помощью теоремы Остроградского-Гаусса интегрирования дивергенции функции по объему V интегрированием самой функции по поверхности ячейки s . В квазистационарном приближении (частота меньше 10^4 – 10^5 Гц), E_n выражалась через скалярный электрический потенциал ϕ : $E_n = -\text{grad}\phi$, производные заменялись их разностными аналогами. Граничные условия зависели от вида полюсообразующей системы (для рассмотренных в данной работе систем они показаны на рис. 1–3). Расчеты проводились методом конечных разностей с использованием декартовой системы координат. Для решения системы уравнений вида (1), записанных для каждого узла расчетной сетки, был использован итерационный метод переменных направлений [8], модифицированный применительно к решению системы трехмерных эллиптических уравнений (подробнее метод решения описан, например, в [3]).

Использование α -метода для расчета распределений низкочастотных электрических полей в открытых областях. В [6] приводится описание так называемого α -метода, позволяющего учесть убывание потенциала электростатического поля на бесконечности при приближении границ расчетной области к исследуемому объекту. Усечение расчетной области вплоть до зоны, лежащей в непосредственной близости от исследуемых объектов, осуществляется следующим образом. Полагается, что потенциал вблизи границы расчетной области по каждому направлению (например, X) затухает по экспоненциальному закону $e^{-\alpha X}$ (где α — α -параметр, представляющий собой в пределе большую отрицательную величину [6]). Поскольку закон изменения потенциала полагается экспоненциальным, задавшись некоторой величиной α , можно определить потенциал в граничной точке M через потенциал в приграничной точке $(M-1)$ в виде $\varphi_M=\beta\cdot\varphi_{M-1}$, где $\beta=1+\alpha\Delta$; Δ — шаг по пространству. Вначале расчет ЭП производится при α -параметре, заданном одинаковым для всех граничных узлов — так называемый глобальный α -параметр (первый проход). Затем авторы [6] предлагают повторить вычисления, задав так называемый локальный α -параметр в каждом граничном узле с помощью вычисленных при первом проходе производных потенциала в точках слоев, расположенных вблизи границы (второй проход).

Данная методика была использована для численного решения с помощью МКР тестовой задачи расчета электрического поля, расположенного в воздухе длинного заряженного проводящего ци-

цилиндра радиусом $R_0=0,02$ м ($L \gg R_0$, где L — длина цилиндра), находящегося под потенциалом $U_0=1$ В. При расчете была использована прямоугольная расчетная сетка, имеющая шаг по пространству $\Delta=0,001$ м, число шагов по каждому направлению — N , габариты расчетной области по каждому направлению — $1,9R_0$. Вследствие осевой симметрии системы рассматривалась 1/4 часть цилиндра. Численные эксперименты показали, что правильно решить данную задачу можно лишь подобрав приемлемое значение глобального α -параметра ($\alpha_{г\Gamma}$) с учетом информации о характере спада потенциала на определенном расстоянии от цилиндра. В данном случае была выбрана величина $\alpha_{г\Gamma}=-7,5$. Распределение модуля напряженности ЭП $|\vec{E}|$, рассчитанное при первом проходе с $\alpha_{г\Gamma}$, характеризуется наличием области с повышенной величиной $|\vec{E}|$ по отношению к аналитическому решению: зона в углу прямоугольной расчетной области (рис. 1). Ее наличие объясняется заданием одинаковых величин производной потенциала в граничных узлах (что соответствует использованию при первом проходе одних и тех же значений $\alpha_{г\Gamma}$ для всех граничных узлов), в то время как расстояния от них до поверхности цилиндра различны. Это положение исправляется в результате повторного расчета при задании на границе локальных α -параметров ($\alpha_{л}$). Однако простой перенос величин α , рассчитанных при первом проходе, со слоя NA , отстоящего от граничного слоя N на N_{α} шагов, на слой N (как рекомендуется в [6]) приводит к существенному завышению величин рассчитанных потенциалов и напряженностей. Дело в том, что в действительности закон изменения потенциала отличен от экспоненциального, поэтому отношение значений потенциалов в соседних узлах будет различным в слоях, расположенных на различном расстоянии от поверхности цилиндра. Зная закон спада потенциала (в данном случае — логарифмический), при расчете параметров, аналогичным локальным α -параметрам (назовем их β -параметрами — β^1), например, в слое $X=\text{const}$, использовался пересчетный коэффициент k_{β}

$$\beta_{jk}^1 = k_{\beta} (\varphi_{NA,j,k} / \varphi_{NA-1,j,k}),$$

где $k_{\beta} = \ln(x_N/x_{N-1}) / \ln(x_{NA}/x_{NA-1})$; $\varphi_{NA,j,k}$, $\varphi_{NA-1,j,k}$ — значения потенциала, полученные при первом проходе; j, k — соответственно индексы изменения Y и Z координат.

В табл. 1 приведены значения коэффициентов k_1, k_2, k_3 , характеризующих распределение напряженности электрического поля, рассчитанного по описанной выше схеме при различных значениях $N_{\alpha}=N-NA$. При этом коэффициент k_1 равняется максимальному отношению напряженностей

электрического поля на поверхности цилиндра вдоль его образующей. Для аналитического решения этот коэффициент равен 1, поскольку напряженность ЭП во всех точках на поверхности цилиндра одинакова. Этот коэффициент характеризует перекос распределения напряженности при численных расчетах из-за наличия упомянутой выше зоны в углу прямоугольной расчетной области (рис. 1) с повышенной величиной E по отношению к аналитическому решению. Коэффициент k_2 равняется отношению средней напряженности ЭП на поверхности цилиндра к аналитическому решению. Коэффициент k_3 равняется максимальной величине относительной погрешности рассчитанного значения E в точках, лежащих на расстоянии $1,1R_0 \leq r \leq 1,25R_0$ от поверхности цилиндра ($k_3 = |E - E_{ан}| / E_{ан}$, где $E_{ан}$ — аналитическое решение для данной точки).

Таблица 1

N_{α}	k_1	k_2	k_3
0	1.088	1.016	0.181
4	1.065	1.01	0.112
8	1.039	0.985	0.0317
8*	1.046*	1.148*	0.221*
12	1.0015	0.918	0.179

Как видно из табл. 1, наилучшего приближения к точному решению удастся достичь при $N_{\alpha}=8$. Для сравнения был выполнен также расчет, соответствующий $N_{\alpha}=8$, но без пересчета величин α при повторном проходе с локальными значениями $\alpha_{л}$; $k_{\beta}=1$ (в табл. 1 этот случай помечен звездочками). Как видно из таблицы, такой подход приводит к существенной погрешности.

Следует отметить, что практическое использование α -метода в каждом конкретном случае требует выбора глобального α -параметра, а также пересчетных коэффициентов k_{β} . Его использование, видимо, целесообразно лишь при проведении серии расчетов в системах однотипных конфигураций, когда глобальные α -параметры одинаковы для всех систем, а локальные могут быть найдены по одинаковым алгоритмам.

Использование метода "односно хорошо согласованного слоя" (ОХСС). Суть ОХСС метода заключается во введении при решении уравнений Максвелла дополнительных сред на границах расчетной области [5, 6]. Полагают, что данные среды имеют анизотропные электрические параметры, обеспечивающие быстрое и безотражательное затухание ЭМП. Для случая электростатики метод односно хорошо согласованного слоя сформулирован следующим образом [6]: при расчете трехмерного ЭП полагается, что на границе расчетной области находятся слои диэлектрика, электри-

ческие параметры которого описываются трехдиагональным тензором для относительной диэлектрической проницаемости

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}.$$

Полагается, что $\epsilon_x = \epsilon_y$ в слоях, параллельных плоскости $Z = \text{const}$; $\epsilon_y = \epsilon_z$ в слоях, параллельных плоскости $Z = \text{const}$, и т.д. Характерной чертой этих слоев является то, что соответствующий элемент тензора ϵ имеет величину, меньшую 1. Например, для слоя, параллельного плоскости $Z = \text{const}$, тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} a_s & 0 & 0 \\ 0 & a_s & 0 \\ 0 & 0 & a_s^{-1} \end{vmatrix},$$

причем $a_s > 1$. В угловых зонах расчетной области тензоры пересекающихся слоев перемножаются.

Задание одной из компонент тензора ϵ дополнительных ОХСС-слоев, поле которых играет лишь вспомогательную роль, меньшей единицы позволяет как бы растянуть границы расчетной области за счет большой величины напряженности в зоне, перпендикулярной одному из направлений ОХСС, обеспечив тем самым быстрое спадание потенциала. Таким образом достигается что-то вроде растягивания пространства между узлами сетки в направлениях, перпендикулярных каждой из граничных плоскостей. Вместо того, чтобы обеспечивать удаление в зону, где ЭМП затухло, с помощью дополнительных шагов по пространству, это делается путем резкого увеличения напряженности ЭМП в направлении, перпендикулярном приграничной плоскости, за счет задания соответствующей компоненты тензора диэлектрической проницаемости меньшей 1, а двух других — много большими 1.

В [7] описано использование ОХСС путем задания особых параметров среды на границе расчетной области в так называемом "поглощающем слое", окруженном снаружи идеальным проводником. Поглощающий "одноосно хорошо согласованный слой" при этом имеет анизотропные электрические параметры, заданные в виде тензора, компонента которого в направлении, перпендикулярном граничной плоскости, например $X = \text{const}$, равна s_x^{-1} , а в остальных равна s_x , причем $s_x > 1$

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} s_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & s_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_z^{-1} \end{vmatrix},$$

где $s_x = k_x + \gamma_x / j\omega\epsilon_0\epsilon$; $s_y = k_y + \gamma_y / j\omega\epsilon_0\epsilon$; $s_z = k_z + \gamma_z / j\omega\epsilon_0\epsilon$; \bar{s} соответствует \bar{s} в (1); k_x, k_y, k_z — коэффициенты; $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ — проводимости в направлениях X, Y, Z соответственно.

Для выбора параметров поглощающего слоя (величины $k_x, k_y, k_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ и числа шагов по пространству $N_{\text{ОХСС}}$) были проведены тестовые счета для случаев проводящего заряженного цилиндра и находящегося под потенциалом проводящего шара. Данный случай соответствует традиционному использованию ОХСС.

Рассмотрим задачу расчета поля находящегося в воздухе длинного проводящего заряженного цилиндра (граничные условия показаны на рис. 1). Согласно [5, 7], для учета поглощения уходящих на бесконечность высокочастотных электромагнитных волн используется слой, проводимость которого γ обладает особыми анизотропными параметрами, описанными выше, а диэлектрическая проницаемость такая же, как у прилегающей к этому слою среды. Оптимальное максимальное значение $\gamma_{\text{опт}}$, определяемое в соответствии с [7], не зависит от частоты. Тогда при низких частотах (например, при 50 Гц) $\gamma_{\text{опт}}$ на 8–9 порядков превосходит величину $\epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \omega$. Учитывая, что на современных вычислительных средствах числа с плавающей запятой при одинарной точности имеют 6 значащих цифр, задание при расчетах так сильно различающихся электрических параметров приводит к тому, что большое значение числа обусловленности матрицы системы уравнений, описывающей электромагнитные процессы, не позволяет получить ее правильное решение. На практике это означает, что при использовании, например, итерационного метода процесс получения приближения к истинному решению оказывается неустойчивым. В данном случае электрические параметры ОХСС можно задать путем изменения диэлектрической проницаемости. В [6] из других соображений авторы приходят к тому же выводу: при расчете высокочастотных процессов необходимо задавать параметры поглощающего слоя путем изменения проводимости, а для низкочастотных процессов этим целям должна служить диэлектрическая проницаемость.

Для выбора электрических параметров ОХСС была проведена серия расчетов при различном характере изменения компонент тензора диэлектрической проницаемости по его глубине. Согласно [7], следует задавать изменение электрических параметров ОХСС толщиной d по глубине (например, в направлении координаты X) в соответствии с полиномиальным законом

$$k_x(x) = 1 + (k_{\text{max}} - 1) \cdot (x/d)^m, \quad (2)$$

где k_{max} — максимальная величина k_x на внешней границе ОХСС; m — показатель степени.

Причем, уровни m должны лежать в пределах $3 \leq m \leq 4$ [7]. Величины $k_y(y)$, $k_z(z)$ вычисляются аналогично

$$k_y(y) = 1 + (k_{\max} - 1) \cdot (y/d)^m,$$

$$k_z(z) = 1 + (k_{\max} - 1) \cdot (z/d)^m.$$

В результате расчетов при рекомендуемом [6] числе шагов по пространству в ОХСС зоне $N_{\text{ОХСС}} = 10$ были определены значения коэффициентов k_1, k_2, k_3 , характеризующие распределение напряженности электрического поля. В табл. 2 приведены их величины, рассчитанные при различных значениях m и k_{\max} . Как видно из таблицы, наилучшего приближения к точному решению удастся достичь при $m=3$ и $k_{\max}=300$. На рис. 1 представлены результаты численных расчетов, а также аналитическое решение для данного случая.

Таблица 2

m	k _{max}	k ₁		k ₂		k ₃	
		цилин.	шар	цилин.	шар	цилин.	шар
3	200	1.034	1.159	1.142	1.099	0.197	0.0807
	300	1.032	1.00	0.997	0.991	0.0259	0.0257
	400	1.030	1.00	0.944	0.998	0.0603	0.063
4	200	1.034		1.157		0.215	
	300	1.033		1.045		0.0951	
	400	1.033	1.00	1.045	1.005	0.0954	0.0726
	500	1.031	1.00	1.034	1.007	0.0847	0.0758

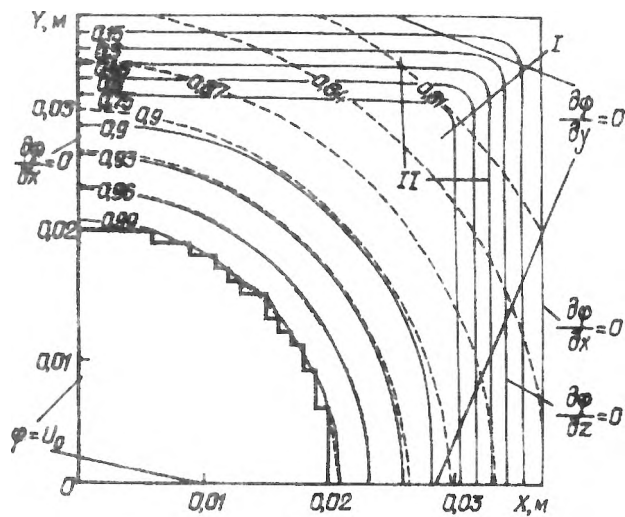


Рис. 1

Практический опыт применения, а также сравнение результатов расчетов ЭП для имеющей аналитическое решение тестовой системы, показали,

что для случая статических и квазистатических ЭП применение метода односно хорошо согласованного слоя более эффективно, чем α -метода. При использовании ОХСС гораздо менее выражен эффект перекоса напряженностей, связанный с различным расстоянием от исследуемого тела до границы расчетной области, не требуется также проведение дополнительных численных исследований по нахождению уровня $\alpha_{\text{ГЛ}}$ и пересчетных коэффициентов k_β .

Было проведено также сравнение аналитических и численных решений для другой тестовой системы, представляющей собой расположенный в воздухе шар под потенциалом $U_0 = 1$ В ($N_{\text{ОХСС}} = 10$, $m = \text{var}$, $k_{\max} = \text{var}$). Вследствие осевой симметрии системы рассматривалась 1/4 часть шара радиусом $R_0 = 0,02$ м, габариты расчетной области по каждому направлению $1,9R_0$, шаг по пространству $\Delta = 0,001$ м. Граничные условия при расчете были следующими: $\partial\varphi/\partial n = 0$, кроме зоны пересечения координатных плоскостей с шаром, где $\varphi = U_0$. Полученные при этом величины коэффициентов k_1, k_2, k_3 представлены в табл. 2. Как следует из табл. 2, рассчитанные распределения напряженности ЭП для шара не столь зависят от величин m и k_{\max} , как для цилиндра, причем наилучшего приближения к точному решению, как и для случая ЭП цилиндра, удастся достичь при $m=3$ и $k_{\max}=300$.

Применение ОХСС для расчета ЭП в присутствии объекта, расположенного во внешнем однородном поле. На практике часто приходится решать задачу расчета ЭП, когда исследуемый объект находится во внешнем однородном электрическом поле напряженностью E_0 . В отличие от традиционного применения ОХСС, когда источник находится внутри расчетной области, в данном случае источник, расположенный на большом расстоянии от объекта, из рассмотрения желательно исключить. Примером такой системы является расчет ЭП в окрестности молниеотводов и защищаемых объектов в условиях грозовой обстановки, когда источник поля — грозное облако — находится на расстоянии нескольких километров над исследуемыми объектами, поэтому включить его в расчетную область не представляется возможным. Слабопроводящий или диэлектрический объект, находящийся в однородном внешнем ЭП напряженностью E_0 , искажает его распределение, и граничные условия $\partial\varphi/\partial n = -E_0$ для одной из координат (например, Y) и $\partial\varphi/\partial n = 0$ для остальных направлений (например, X и Z) могут быть заданы лишь на достаточном удалении от объекта. Для приближения границ расчетной области к объекту предлагается использовать ОХСС, а на границе задавать условия

$$\partial\varphi/\partial n = -k_{\max} E_0 \quad \text{или} \quad \partial\varphi/\partial n = 0$$

(в данном случае $\partial\varphi/\partial y = -k_{\max} E_0$; $\partial\varphi/\partial x = 0$;

$\partial\varphi/\partial z=0$).

Таким образом, ненулевое граничное условие при $y=y_{\max}$: $\partial\varphi/\partial n=-E_0$, задающее напряженность внешнего поля E_0 в расчетной области, заменяется на $\partial\varphi/\partial n=-k_{\max}E_0$. Следовательно, напряженность приложенного поля в исследуемой области будет по-прежнему E_0 , а в ХСС зоне $-E_0k_{\max}$.

Такой подход позволил добиться хорошего совпадения с аналитическим решением для находящихся в воздухе диэлектрического и слабопроводящего шаров, расположенных во внешнем однородном ЭП, направленном вдоль оси Y . Так, для диэлектрического шара с $\epsilon=4$, $R_0=0,02$ м (габариты расчетной области — $1,9R_0 \times 1,9R_0 \times 1,9R_0$, $\Delta=0,001$ м, вследствие осевой симметрии системы рассматривались 1/4 часть шара) относительное отличие вычисленных значений потенциала φ от $\varphi_{\text{ан}}$ — аналитического решения: $\delta_{\text{отн}} = |\varphi - \varphi_{\text{ан}}| / \varphi_{\text{ан}}$ не превышало 3% в зоне $r < 1,25R_0$, включающей внутреннюю часть шара и границу раздела "шар-воздух", а во внешней среде при $1,1R_0 < r < 1,25R_0$ — $\delta_{\text{отн}} < 2\%$ (где $r=(x^2+y^2+z^2)^{0,5}$). Численные эксперименты показали слабую зависимость полученного решения от параметров ОХСС. Так, результаты расчетов, проведенных при следующем наборе параметров ОХСС: $N_{\text{ОХСС}}=10$, $m=3$, $k_{\max}=300$, а также $N_{\text{ОХСС}}=5$, $m=3$, $k_{\max}=100$, имеют совпадение в пределах 1%. На рис. 2 представлены результаты численных расчетов распределений линий равного потенциала в данном случае.

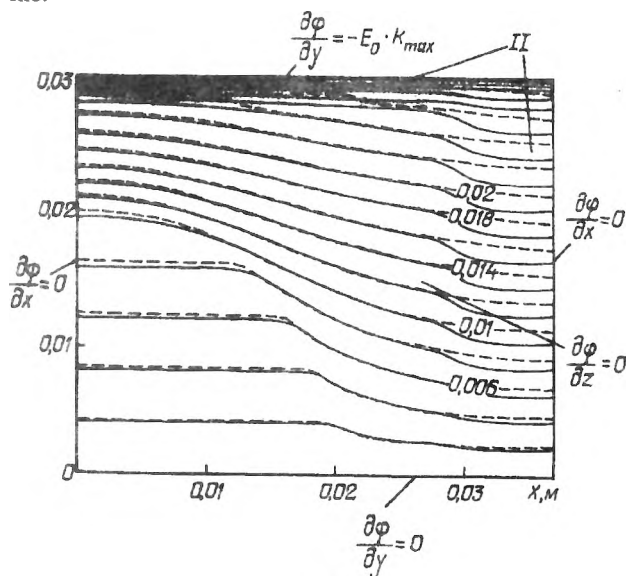


Рис. 2

В качестве примера практического использования ОХСС решена задача расчета электрического поля при нахождении человека во внешнем однородном вертикально направленном электрическом поле напряженностью $E_0 = 1$ кВ/м. Известно, что биологические ткани тела человека при низ-

ких частотах обладают слабопроводящими электрическими параметрами — $\gamma_0 \approx 0,1$ См/м, [9]. Вследствие того, что в этом случае $\epsilon_0 \epsilon \omega$ на много порядков меньше, чем γ_0 (например, при 50 Гц), расчет ЭП вне тела человека можно проводить при допущении, что оно однородный проводник [2]. На рис. 3 показаны рассчитанные распределения линий равной напряженности ЭП во всей расчетной области в сечениях тела человека $Z = \text{const}$ (а) и $X = \text{const}$ (б), проходящих через ось симметрии. При расчете поверхность тела женщины была задана с помощью более 10000 треугольников, имеющих различную ориентацию в пространстве, информация о которых записывалась в dx/f -формате. Сравнение результатов расчета распределения электрического поля в окрестности тела человека при приложении однородного внешнего ЭП в уменьшенной расчетной области (рис. 3) с результатами расчета, полученными в [3] для полной расчетной области, показало, что относительные отличия величины напряженности ЭП в этих двух случаях не превышают 1%. Причем, результаты, полученные в [3], имеют хорошее совпадение с результатами численных расчетов ЭП в окрестности тела человека, полученными другими авторами. В то же время за счет приближения границ расчетной области к поверхности тела человека порядок решаемой системы уравнений удалось существенно снизить, благодаря чему не потребовалось решение

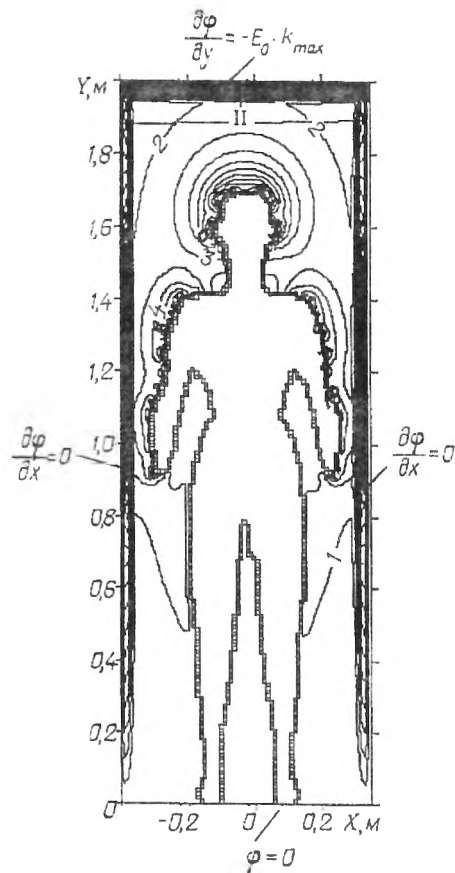


Рис. 3,а

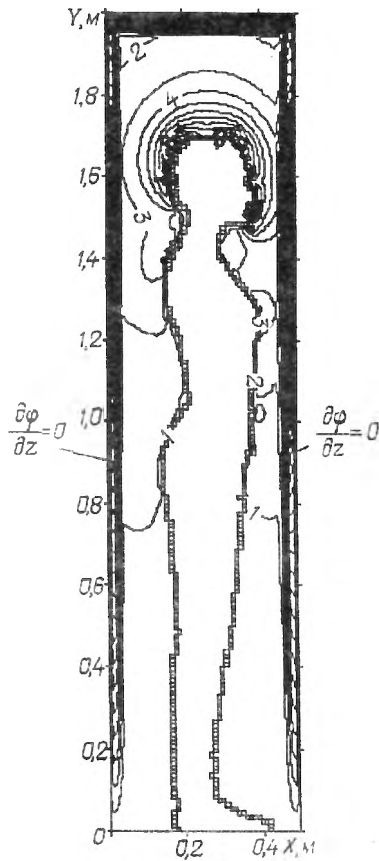


Рис. 3.5

промежуточных задач, как в [3], а ресурсы памяти и времени счета были сокращены более чем на порядок.

Выводы. 1. Решение тестовых задач показало, что использование метода однослойно хорошо согласованного слоя для расчета распределений низкочастотных электрических полей в открытых областях более целесообразно, чем применение α -метода.

2. При расчете распределений низкочастотных электрических полей в открытых областях рекомендуется задавать анизотропные параметры поглощающих граничных слоев путем изменения величины диэлектрической проницаемости, а не удельной электропроводности. В результате проведенных расчетов определены параметры, задающие изменение величины диэлектрической проницаемости по глубине однослойно хорошо согласованного слоя в соответствии с полиномиальным законом: $m=3$, $k_{\max}=300$. Использование данных

параметров обеспечивает относительную погрешность расчетов ЭП менее 3%.

3. Проведенное тестирование предложенного способа расчета распределений ЭП, расположенных в однородном внешнем электрическом поле напряженностью E_0 , диэлектрических и слабопроводящих объектов показало, что использование однослойно хорошо согласованных слоев и задание на границах расчетной области условий $\partial\varphi/\partial n = -k_{\max} E_0$ или $\partial\varphi/\partial n = 0$ обеспечивает расчет электрических полей с относительной погрешностью менее 3%.

4. С помощью метода однослойно хорошо согласованных слоев выполнен пример расчета распределения ЭП в окрестности тела человека, на которое воздействует однородное внешнее поле. При этом порядок решаемой системы уравнений, а значит, ресурсы памяти и времени счета были сокращены более чем на порядок по сравнению со случаем расчета ЭП в полной расчетной области.

1. Резникита М.М. Численный расчет распределения неоднородного низкочастотного электрического поля в окрестности тела человека // Электричество. — 2003. — №4. — С. 44—48.

2. Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987. — 286 с.

3. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989. — 616 с.

4. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 114. — P. 185—200.

5. Berenger J.-P. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. — 1996. — Vol. 127. — P. 363—379 (<http://www.utdallas.edu/~cantrell/ee6351/3-dpml.pdf>).

6. Dimbylow P.J. Current densities in a 2 mm resolution anatomically realistic model of the body induced by low frequency electric fields // Phys. Med. Biol. — 2000. — № 45. — P. 1013—1022.

7. Gabriel S., Lau R.W., Gabriel C. The dielectric of biological tissues: II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz // Phys. Med. Biol. — 1996. — Vol. 31. — P. 2251—2269.

8. Taflov A., Hagness S. Computational electrodynamics: the finite difference time domain method. — Artech House, Boston-London, 2000. — 852 p.

9. Werner D.H., Mittra R. Frontiers in electromagnetics. — IEEE Press, New York, 1999. — 876 p.

Надійшла 12.04.07