УДК 621.314.057

П.С.Кособуцький, докт.техн.наук, **М.С.Сегеда,** докт.техн.наук, **Г.Ш.Бакало** (Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів)

Моделювання динамічного енергообміну електромагнітного осцилятора з середовищем омічного опору та силовим джерелом синусоїдної дії і кореляція його із спектром коливання

Досліджено процес енергетичного обміну між зарядом, що гармонічно коливається в електромагнітному колі під дією примусової сили, середовищем із омічним опором і джерелом зовнішньої дії, та встановлена кореляція цих процесів з характером формування спектрів вимушених коливань.

Исследовано процесс энергетического обмена между зарядом, который гармонически колеблется в электромагнитной цепи под воздействием принудительной силы, средой с омическим сопротивлением и источником внешнего воздействия, и установлена корреляция этих процессов с характером формирования спектров принудительных колебаний.

Вступ. В даній роботі на моделі гармонійного наближення досліджується енергообмін між осцилятором та зовнішніми чинниками дисипації та збудження. Незважаючи на те, що коливання електромагнітного гармонійного осцилятора (ЕМГО) вивчені досить добре і відповідні результати узагальнені у багатьох монографіях, у тому числі [1, 7], мета роботи й надалі залишається актуальною. Це підтверджується тим, що характер релаксації енергії електрона як осцилятора відіграє важливу роль в енергетичних переходах [2, 3, 6], формуванні оптичних властивостей кристалів [4] та в інших більш загальних фізичних проблемах [4, 5].

Теоретичні результати. Обмежимося розглядом одновимірних вільних і вимушених коливань лінійного ЕМГО у зовнішньому полі $eE(\Omega, t)$ синусоїдної дії, які описуються відомим диференційним рівнянням

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\gamma\frac{q}{dt}+\omega_0^2q=\frac{eE_0}{L}\begin{pmatrix}\sin\Omega t\\ \cos\Omega t\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

і розв'язанням якого є

$$q(\Omega,\gamma,t)=\left(A\cos\omega t+B\sin\omega t\right)\exp(-\gamma t)+$$
$$+q_m\begin{pmatrix}\cos(\Omega t-\varphi)\\ \sin(\Omega t-\varphi)\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $\omega=\left(\omega_0^2-\gamma^2\right)^{0,5}$, ω_0 — резонансна частота осцилятора; γ — фактор лінійного загасання; $q_m=eE_0\,/\,L\,(\omega_0^2-\Omega^2)$ — амплітуда вимушених коливань заряду в електромагнітному колі, яка зсунута відносно зовнішньої дії за фазою на величину $\varphi=\varphi(\Omega\,,\gamma)$ і $A=q_0-q_m\cos\varphi$, $B=\left(I_0-q_m\Omega\sin\varphi+ +q_0\gamma-\gamma q_m\cos\varphi\right)/\omega$ — сталі інтегрування, які визначені за умови, що у початковий момент часу струм у колі був I_0 та заряд q_0.

Перший інтеграл рівняння (1) із точністю до сталої інтегрування U_0 має відомий вигляд

$$\frac{L}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2+\frac{L\omega_0^2q^2}{2}=U_0+Q\left(\Omega,\gamma,t\right)+A\left(\Omega,\gamma,t\right). \qquad (3)$$

Тут дисипативна функція Релея

$$Q\left(\Omega,\gamma,t\right)=-2\gamma L\int\left(\frac{dq}{dt}\right)^2dt \qquad (4)$$

характеризує енергообмін ЕМГО із середовищем опору, а активна функція

$$A\left(\Omega,\gamma,t\right)=e\int\left(\frac{dq}{dt}\right)E(\Omega,t)dt \quad — \qquad (5)$$

із зовнішнім джерелом.

Після інтегрування (5) з врахуванням (2) одержуємо, що активну функцію зручно подати у вигляді суми двох складових

$$A\left(\Omega,\gamma,t\right)=A_1\left(\Omega,\gamma,t\right)+A_2\left(\Omega,\gamma,t\right), \qquad (6)$$

де

$$A_1\left(\Omega,\gamma,t\right)=\frac{eE_0q_m\Omega}{2}\begin{pmatrix}t\sin\varphi+(2\Omega)^{-1}\cos(2\Omega t-\varphi)\\ t\sin\varphi-(2\Omega)^{-1}\cos(2\Omega t-\varphi)\end{pmatrix};$$

$$A_2\left(\Omega,\gamma,t\right)=\frac{eE_0}{2}e^{-\gamma t}\Big\{\Theta_1\begin{pmatrix}\delta_1\cos\Delta_+t+\delta_2\sin\Delta_+t\\ \delta_1\cos\Delta_+t+\delta_2\sin\Delta_+t\end{pmatrix}+ \qquad (7)$$

$$+\Theta_2\begin{pmatrix}\delta_3\cos\Delta_-t+\delta_4\sin\Delta_-t\\ \delta_1\cos\Delta_+t+\delta_2\sin\Delta_+t\end{pmatrix}\Bigg\}. \qquad (8)$$

Тут введені такі позначення:

$$\Delta_\pm=\omega\pm\Omega\,,\quad \Theta_{1,2}=\left[\gamma^2+\Delta_\pm^2\right]^{-1},\quad \delta_1=-\gamma\alpha_1-\Delta_+\alpha_2;$$
$$\delta_2=-\gamma\alpha_2+\Delta_+\alpha_1;\qquad \delta_3=-\gamma\alpha_1-\Delta_-\alpha_2;$$
$$\delta_4=-\gamma\alpha_2+\Delta_-\alpha_1;\quad \alpha_1=-\gamma A+\omega B,\quad \alpha_2=-\gamma B-\omega A\,.$$

Функцію Релея зручно подати як суму трьох складових

$$Q(\Omega,\gamma,t)=Q_1(\Omega,\gamma,t)+Q_2(\Omega,\gamma,t)+Q_3(\Omega,\gamma,t), \qquad (9)$$

де

$$Q_1\left(\Omega,\gamma,t\right)=-2\gamma L\exp(-2\gamma t)\times$$
$$\times\left\{\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{-4\gamma}+\frac{1}{4\omega_0^2}\Big[-\gamma(\alpha_1^2-\alpha_2^2)+2\omega\alpha_1\alpha_2\cos2\omega t+\right.$$
$$\left.+\left(\omega(\alpha_1^2-\alpha_2^2)-2\gamma\alpha_1\alpha_2\right)\sin2\omega t\Big]\right\}, \qquad (10)$$

$$Q_2(\Omega,\gamma,t)=-\gamma Lq_m^2\Omega^2\begin{pmatrix}t-\dfrac{1}{2\Omega}\sin[2(\Omega t-\varphi)]\\ t+\dfrac{1}{2\Omega}\sin[2(\Omega t-\varphi)]\end{pmatrix}; \qquad (11)$$

$$Q_3\left(\Omega,\gamma,t\right)=2\gamma Lq_m\Omega\exp\left(-\gamma t\right)\times$$
$$\times\left\{\Theta_1\begin{pmatrix}[\theta_1\sin\Delta_+t+\theta_2\cos\Delta_+t]\\ [\theta_5\cos\Delta_-t-\theta_6\sin\Delta_-t]\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+\Theta_2\begin{pmatrix}[\theta_3\sin\Delta_-t+\theta_4\cos\Delta_-t]\\ [\theta_7\cos\Delta_-t-\theta_8\sin\Delta_-t]\end{pmatrix}\right\}. \qquad (12)$$

Тут:

$\theta_1=-\gamma\beta_1+\Delta_+\beta_2,\quad \theta_2=-\gamma\beta_2-\Delta_+\beta_1,$
$\theta_3=-\gamma\beta_3+\Delta_-\beta_4,\quad \theta_4=-\gamma\beta_4-\Delta_-\beta_3,$
$\beta_1=\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi,\quad \beta_2=\alpha_1\sin\varphi-\alpha_2\cos\varphi,$
$\beta_3=-\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi,\quad \beta_4=-\alpha_1\sin\varphi+\alpha_2\cos\varphi.$

Аналіз одержаних виразів свідчить, що виділені нами три складові дисипативної функції мають принципово різні характери часових залежностей. Перша частина $Q_1\left(\Omega,\gamma,t\right)$ описує динаміку розсіювання енергії електроном провідності на центрах омічного опору. Для лінійного ЕМГО функція $Q_1\left(\Omega,\gamma,t\right)\Big|_{\Omega=0}=Q(\gamma,t)$ є обвідною його повної енергії, тому фазовий портрет коливань електромагнітного осцилятора в енергетичних координатах $U(\gamma,t),\,dU(\gamma,t)/dt$ має осцилюючий характер. Час релаксації енергії в процесі коливань $\tau_U=2\tau_y$, де τ_y – час релаксації заряду. Ввімкнення синусоїдного джерела не змінює загальний характер динамічного спектру $Q_1(\gamma,t)$.

Друга частина $Q_2(\gamma,t)$ від'ємна і плавно зростає із часом. Вона описує втрати енергії осциляторами в середовищі опору внаслідок їх вимушених коливань. Третя частина $Q_3(\gamma,t)$ з часом осцилює і виражає прояв в цьому процесі інтерференції процесу енергообміну між коливним станом осцилятора і синусоїдного джерела (рис. 1).

Щоб підтримати в системі вимушені коливання, необхідно включити в дію функцію $A(\Omega,\gamma,t)$. Вона також складається із двох частин, перша із яких $A_1(\Omega,\gamma,t)$ описує вимушену дію джерела на осцилятор, а друга $A_2(\Omega,\gamma,t)$ — інтреференцію коливних станів осцилятора і джерела. Динамічні спектри $A_1(\Omega,\gamma,t)$ і $A_2(\Omega,\gamma,t)$ зображені на рис. 2. Осцилююча складова $A_2(\Omega,\gamma,t)$ з часом швидко загасає. Вимушена потужність джерела $A_1(\Omega,\gamma,t)$ з часом змінюється періодично і компенсує втрати в коливному контурі, внаслідок чого в ньому формуються усталені коливання.

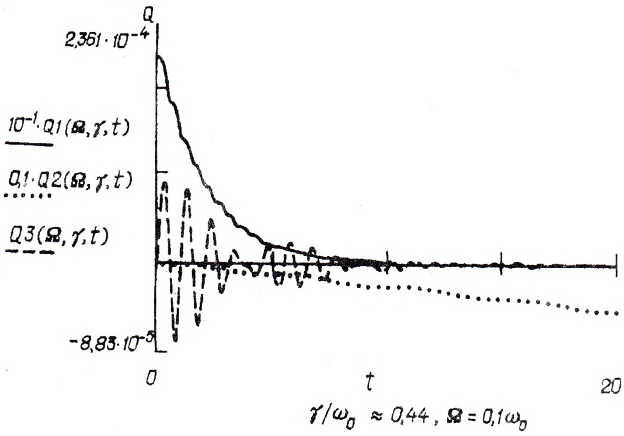

Рис. 1

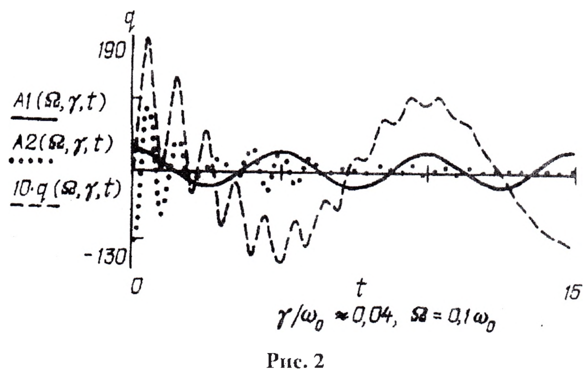

Рис. 2

Як зразок апробації одержаних результатів на рис. 3, *а* подані розрахункові спектри енергетичних функцій $Q(\Omega,\gamma,t)$ і $A(\Omega,\gamma,t)$. Бачимо, що вираз для $Q(\Omega,\gamma,t=T)$ визначає відомий спектр поглинання енергії осцилятором, тоді як відповідний для $A(\Omega,\gamma,t=T)$ — дисипацію реакції коливного контура на синусоїдну дію зовнішнього джерела. В оптиці ця залежність відома як діелектрична функція. Стає також зрозумілим механізм уникнення необмеженого збільшення амплітуди вимушених коливань за умови резонансу за наявності в електромагнітному колі джулевих втрат. Як бачимо із рис. 3, *б*, за цих умов складові активної $a(\Omega,\gamma,t)=eE_0q_m\Omega t\sin\varphi/2$ і дисипативної $q(\Omega,\gamma,t)=$ $=-\gamma Lq_m^2\Omega^2 t$ функцій точно скорельовані між собою і взаємно компенсують одна одну.

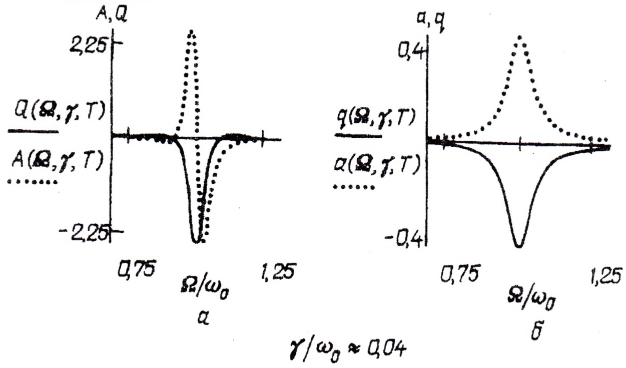

Рис. 3

Висновки. 1. Під час низькочастотної дії зовнішнього синусоїдного джерела на осцилятор характер биття має процес динамічного енергообміну енергіями між ними. Максимум модуляції спектра вимушених коливань формується за умови, коли імпульс пересилання енергії від джерела є в фазі або протифазі з амплітудою коливань осцилятора. Спектр биття амплітуди вимушених коливань осцилятора формується за умови, коли він коливається із періодом $T_y=2\pi/\Delta_+$, а період биття визначається огинаючою функції $A(\Omega,t)$, яка вже має період $T_A=2\pi/\Delta_-$. Мінімуми амплітуд биття коливань осцилятора формуються за рахунок пересилання енергії назад від осцилятора до джерела. В ці проміжки осцилятор заспокоюється, оскільки протягом них $A(\Omega,t)\langle 0$ і повна динамічна енергія осцилятора мінімізується $U(\Omega,t)\to 0$.

2. Динаміка енергообміну осцилятора із середовищем опору його коливного руху визначається проявом процесів інтерференції коливних станів осцилятора і синусоїдного джерела, втратами енергії осцилятором в середовищі опору внаслідок його вимушених коливань, та відповідним процесом дисипації енергії як вільного лінійного електромагнітного осцилятора.

3. В режимі усталених коливань інтерференційні ефекти в явищі енергообміну подавлені загасанням і не актуальні.

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механіка. — М.: Наука, 1988. — 213 с.

2. *Croxson P.* Induced transitions and energy of damped oscillator // Phys.Rev. — 1994. — A49. — Pp. 588—591.

3. *Grigorchuk N.I.* Polariton damping in a monoatomic crystal // Low.Temp.Phys. — 1993. — 19(9). — Pp. 739—740.

4. *Li Hua Yu, Chand-Pu Cun.* Evolution of the wave function in a dissipative system // Phys.Rev. — 1994. — A49. — Pp. 592—595.

5. *Maamche M., Provost J.P., Vallee G.* Unitary equivalence and phase properties of the quantum parametric and generalized harmonic oscillators // Phys.Rev. — 1999. — A59. — № 3. — Pp. 1777—1780.

6. *Papadopoulos G.J., Hadjiagapiou I.* Comment on "Induced transitions and energy of a damped oscillator" // Phys.Rev. — 1999. — A59. — Pp. 3127—3128.

7. *Timoschenko S.* Vibration Problems in Engineering / Third Ed., in collaboration with D.H.Young. D.Van Nostrand Company. Inc. — Toronto-New York-London. 1955.

Надійшла 24.05.2006

ГОТУЄТЬСЯ ДО ВИХОДУ В СВІТ!

СЕГЕДА М.С. **Електричні мережі та системи.** — Львів: НУ "Львівська політехніка", 2007. — 450 с.

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів спеціальностей ВНЗ, аспірантів, викладачів і спеціалістів відповідного профілю.

У підручнику викладено характеристику електричних мереж і систем та їх режимів, основи теорії пересилання електричної енергії, заступні схеми елементів електроенергетичних мереж і систем та обчислення їх параметрів, методи аналізу усталених режимів розімкнених та замкнених електричних мереж з використанням інженерних підходів й формалізованих методів, несиметричні та несинусоїдні режими, поняття про реактивну потужність в електричних мережах, пересилання електричної енергії лініями надвисокої напруги, основи керування режимами та проектування розвитку електроенергетичних мереж і систем, основи механічної частини повітряних ліній електропересилання.

Кожний розділ має приклади та питання для самоперевірки. У додатку наведено довідковий матеріал, який використовується під час розв'язання прикладів.