УДК 621.313.33

С.Рендзіняк, канд.техн.наук (НУ "Львівська політехніка", Львів)

Паралельне моделювання нелінійних підсхем методом роздільного інтегрування з їх динамічним узгодженням

Запропоновано новий метод узгодження нелінійних підсхем, отриманих після розділення складної схеми на частини. Задачу моделювання методом роздільного інтегрування підсхем з узгодженням їх розв'язків за допомогою додаткових змінних зв'язку заміняє паралельне інтегрування окремих підсхем, до яких під'єднані макромоделі сусідніх підсхем. Роль змінних зв'язку при цьому відіграють змінні стану макромоделей, які уточнюються в момент узгодження підсхем. Внаслідок цього значно покращується стійкість обчислювального процесу. Показано механізм формування макромоделей і розроблено алгоритм паралельного моделювання підсхем.

Предложен новый метод согласования нелинейных подсхем, полученных после расщепления сложной схемы на части. Задачу моделирования методом раздельного интегрирования подсхем с согласованием их решений с помощью дополнительных переменных связи заменяет параллельное интегрирование отдельных подсхем, к которым присоединены макромодели соседних подсхем. Роль переменных связи при этом выполняют переменные состояния макромоделей, которые уточняются в момент согласования подсхем. Вследствие этого значительно улучшается устойчивость вычислительного процесса. Показан механизм формирования макромоделей и разработан алгоритм параллельного моделирования подсхем.

Коли деяка складна схема розділяється на деяке число підсхем і зв'язки між ними встановлюються за допомогою додаткових змінних зв'язку, які на схемах звичайно подаються як джерела енергії, то внаслідок покрокової затримки процесу узгодження підсхем у різницевій обчислювальній схемі відбувається трансформація певних компонент з неявної в явну форму, що суттєво впливає на стійкість обчислювального процесу [1, 2, 4]. Вирішення цієї проблеми пов'язано з заміною статичних джерел на динамічні макромоделі тих підсхем, які представлені цими джерелами. При цьому кількість невідомих не збільшується, а саме відповідні змінні зв'язку заміняються на те саме число змінних стану макромоделей.

Розглянемо випадок розщеплення складної схеми, наприклад, на три підсхеми. Тоді достатньо мати для кожної підсхеми її повноцінну модель і спрощену заступну модель-багатополюсник, які зв'язані топологічними рівняннями зв'язку. Тоді почерговий розрахунок трьох підсхем (рис. 1) заміняємо задачами моделювання схем на рис. 2.

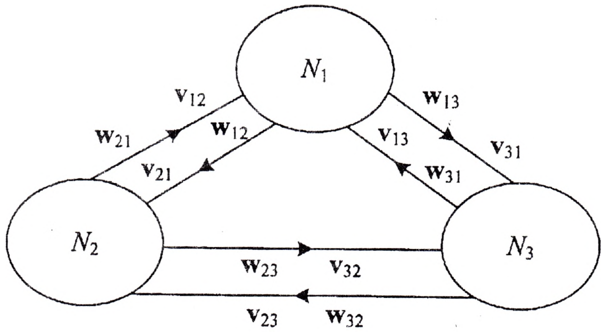

Рис. 1

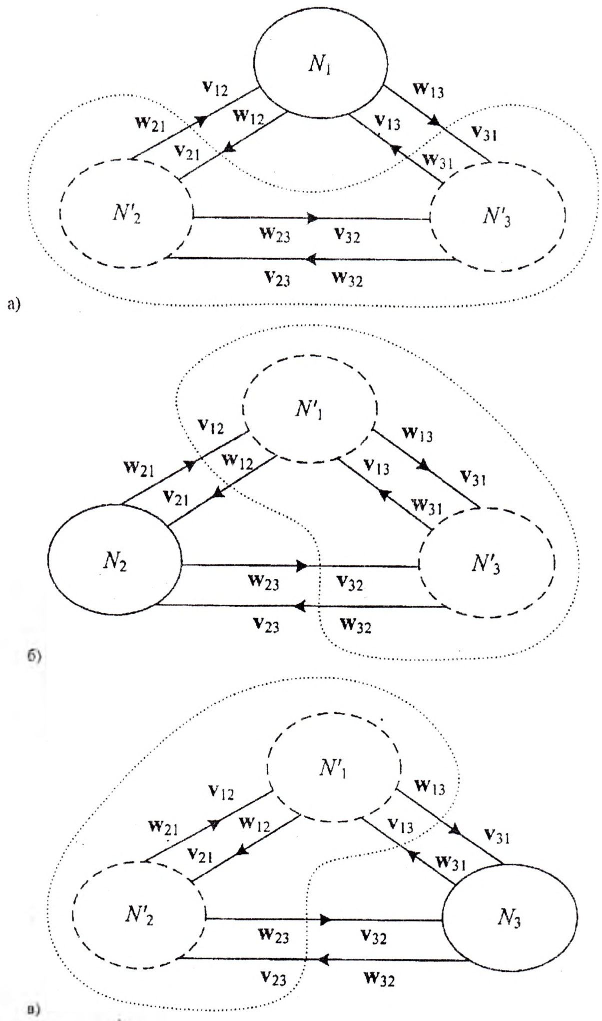

Рис. 2

Нехай кожна підсхема описується системою алгебро-диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\mathbf{M}_r(\mathbf{x_r})d\mathbf{x}_r/dt=\mathbf{P}_r\mathbf{x}_r+f_r(\mathbf{x}_r,\mathbf{v}_r)+\mathbf{B}_r\mathbf{v}_r,\\ \mathbf{w}_r=\mathbf{D}_r\mathbf{x}_r+\mathbf{H}_r\mathbf{v}_r,\end{gathered}\tag{1}$$

де $r=\overline{1,R}$ — номер підсхеми; R — кількість підсхем; $\mathbf{x}_r$ — вектор змінних стану підсхеми; $\mathbf{v}_r$ — вектор вхідних змінних підсхем; $\mathbf{w}_r$ — вектор вихідних змінних підсхем; $\mathbf{M}_r(\mathbf{x_r})$ — матриця параметрів реактивних елементів, у загальному випадку залежна від змінних стану; $\mathbf{P}_r$ — матриця лінійної частини підсхеми; $f_r(\mathbf{x}_r,\mathbf{v}_r)$ — вектор параметрів нелінійних елементів, у тому числі й параметрів незалежних джерел енергії; $\mathbf{B}_r$, $\mathbf{D}_r$ — матриці, які встановлюють взаємозв'язок між змінними стану і зовнішніми змінними підсхеми.

Між підсхемами встановлюються топологічні зв'язки, які представлені системою рівнянь

$$\mathbf{w}=\mathbf{F}\,\mathbf{v},\tag{2}$$

де вектори зовнішніх змінних $\mathbf{v}$ і $\mathbf{w}$ об'єднують у собі всі компоненти векторів $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{w}_r$, а матриця $\mathbf{F}$ — матриця перестановлень.

Отже ітераційна процедура методу роздільного інтегрування підсхем, який за своєю природою є паралельним релаксаційним методом

$$\begin{gathered}d\mathbf{x}_1^{J+1}/dt=f_1\left(\mathbf{x}_1^{J+1},\mathbf{v}^J\right);\\ d\mathbf{x}_2^{J+1}/dt=f_2\left(\mathbf{x}_2^{J+1},\mathbf{v}^J\right);\\ d\mathbf{x}_3^{J+1}/dt=f_3\left(\mathbf{x}_3^{J+1},\mathbf{v}^J\right);\\ h\left(\mathbf{x}_1^{J+1},\mathbf{x}_2^{J+1},\mathbf{x}_3^{J+1},\mathbf{v}^{J+1}\right)=0,\end{gathered}\tag{3}$$

замінюється паралельним інтегруванням систем диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{z}_2\\ \mathbf{z}_3\end{pmatrix}=f_1\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3\right),\\ \mathbf{z}_1=\mathbf{D}_1\mathbf{x}_1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{x}_2\\ \mathbf{z}_3\end{pmatrix}=f_2\left(\mathbf{z}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{z}_3\right),\\ \mathbf{z}_2=\mathbf{D}_2\mathbf{x}_2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\\ \mathbf{x}_3\end{pmatrix}=f_3\left(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{x}_3\right),\\ \mathbf{z}_3=\mathbf{D}_3\mathbf{x}_3.\end{cases}$$

При цьому за відсутності змінних зв'язку втрачається необхідність у додаткових ітераціях, а узгодження підсхем розуміється як встановлення в точках узгодження скоректованих початкових умов змінних стану макромоделей підсхем. Очевидно, що застосування неявних методів інтегрування до цих задач не накладає обмежень на крок інтегрування, а точність моделювання залежатиме як від кроку інтегрування підсхеми, так й від кроку узгодження підсхем і від точності представлених макромоделей.

1. Знаходження параметрів системи рівнянь згорнутої математичної моделі підсхеми з відомої математичної моделі підсхеми. Нехай математична модель r-ої підсхеми подана системою диференціальних рівнянь у формі Коші та вихідними рівняннями

$$\begin{gathered}\mathbf{M}_r d\mathbf{x}_r/dt=\mathbf{P}_r\mathbf{x}_r+\mathbf{ASV}_r\mathbf{s}_r+\mathbf{B}_r\mathbf{v}_r,\\ \mathbf{w}_r=\mathbf{D}_r\mathbf{x}_r+\mathbf{ASW}_r\mathbf{s}_r+\mathbf{H}_r\mathbf{v}.\end{gathered}$$

Необхідно отримати математичну модель згорнутої підсхеми зі змінними стану $\mathbf{z}_r$

$$\begin{gathered}\mathbf{M}''_r d\mathbf{z}_r/dt=\mathbf{P}''_r\mathbf{z}_r+\mathbf{ASV}''_r\mathbf{s}_r+\mathbf{v}_r,\\ \mathbf{w}_r=\mathbf{z}_r+\mathbf{ASW}_r\mathbf{s}_r+\mathbf{H}_r\mathbf{v}_r.\end{gathered}\tag{4}$$

Очевидно, що будь-яка редукція рівнянь супроводжується їх спрощенням, тобто додатковими умовами, які уможливлюють цю дію.

Перша умова редукції системи рівнянь підсхеми: група рівнянь, які описують ведучу підсхему, повинна співпадати з відповідною групою рівнянь цілої схеми.

У роботі [3] показано, що дотримання цієї умови можливо, якщо вектор змінних стану макромоделі визначається через змінні стану підсхеми за виразом

$$\mathbf{z}_r=\mathbf{D}_r\mathbf{x}_r,\tag{5}$$

а параметри реактивних елементів макромоделі через параметри реактивних елементів підсхеми як

$$\mathbf{M}_r''^{-1}\left(\mathbf{x}_r\right)=\mathbf{D}_r\mathbf{M}_r^{-1}\left(\mathbf{x}_r\right)\mathbf{B}_r.$$

Друга умова редукції системи рівнянь підсхеми: усталені режими вихідної та згорнутої математичних моделей підсхеми після завершення перехідного процесу повинні співпадати.

Для стійких підсхем математично ця умова означає однакові розв'язки систем алгебраїчних рівнянь, утворених з систем диференціальних рівнянь за умови рівності нулю всіх похідних

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_r\mathbf{x}_r+\mathbf{ASV}_r\mathbf{s}_r+\mathbf{B}_r\mathbf{v}_r=0,\\ \mathbf{P}''_r\mathbf{z}_r+\mathbf{ASV}''_r\mathbf{s}_r+\mathbf{v}_r=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Розділимо вектор $\mathbf{x}_r$ на два підвектори

$$\mathbf{z}_r=\mathbf{D}_{r,1}\mathbf{x}_{r,1}+\mathbf{D}_{r,2}\mathbf{x}_{r,2}\tag{7}$$

так, щоб підматриця $\mathbf{D}_{r,1}$ була квадратною і невиродженою. Відповідно до цих підвекторів розділимо матрицю $\mathbf{P}$ системи (6) на підматриці

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{r,11} & \mathbf{P}_{r,12} \\ \mathbf{P}_{r,21} & \mathbf{P}_{r,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{r,1} \\ \mathbf{x}_{r,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{ASV}_{r,1} \\ \mathbf{ASV}_{r,2} \end{pmatrix} \mathbf{s}_r + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{r,1} \\ \mathbf{B}_{r,2} \end{pmatrix} \mathbf{v}_r = 0.$$

Тепер замінимо підвектор $\mathbf{x}_{r,1}$ на підвектори $\mathbf{z}_r$ та $\mathbf{x}_{r,2}$ згідно з (7), а саме $\mathbf{x}_{r,1} = \mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{z}_r - \mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\mathbf{x}_{r,2}$. Тоді отримуємо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{r,11}\mathbf{D}_{r,1}^{-1} & \mathbf{P}_{r,12} - \mathbf{P}_{r,11}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2} \\ \mathbf{P}_{r,21}\mathbf{D}_{r,1}^{-1} & \mathbf{P}_{r,22} - \mathbf{P}_{r,21}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_r \\ \mathbf{x}_{r,2} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \mathbf{ASV}_{r,1} \\ \mathbf{ASV}_{r,2} \end{pmatrix} \mathbf{s}_r + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{r,1} \\ \mathbf{B}_{r,2} \end{pmatrix} \mathbf{v}_r = 0.$$

Друге рівняння цієї системи розв'яжемо відносно підвектора $\mathbf{x}_{r,2}$ та підставимо отриманий вираз у перше рівняння, яке набуває вигляд

$$\left[\frac{\mathbf{P}_{r,11}}{\mathbf{D}_{r,1}} - \frac{\left(\mathbf{P}_{r,12} - \mathbf{P}_{r,11}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)}{\left(\mathbf{P}_{r,22} - \mathbf{P}_{r,21}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)} \cdot \frac{\mathbf{P}_{r,21}}{\mathbf{D}_{r,1}}\right] \mathbf{z}_r +$$

$$+ \left[\mathbf{ASV}_{r,1} - \frac{\left(\mathbf{P}_{r,12} - \mathbf{P}_{r,11}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)}{\left(\mathbf{P}_{r,22} - \mathbf{P}_{r,21}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)} \cdot \mathbf{ASV}_{r,2}\right] \mathbf{s}_r +$$

$$+ \left[\mathbf{B}_{r,1} - \frac{\left(\mathbf{P}_{r,12} - \mathbf{P}_{r,11}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)}{\left(\mathbf{P}_{r,22} - \mathbf{P}_{r,21}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)} \cdot \mathbf{B}_{r,2}\right] \mathbf{v}_r = 0.$$

Визначивши тепер вектор змінних зв'язку $\mathbf{v}_r$ і порівнюючи його з тим самим вектором з рівняння (6), знаходимо значення матриць

$$\mathbf{P}_r'' = \left[\mathbf{B}_{r,1} - \frac{\left(\mathbf{P}_{r,12} - \mathbf{P}_{r,11}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)}{\left(\mathbf{P}_{r,22} - \mathbf{P}_{r,21}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)} \cdot \mathbf{B}_{r,2}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{\mathbf{P}_{r,11}}{\mathbf{D}_{r,1}} - \frac{\left(\mathbf{P}_{r,12} - \mathbf{P}_{r,11}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)}{\left(\mathbf{P}_{r,22} - \mathbf{P}_{r,21}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)} \cdot \frac{\mathbf{P}_{r,21}}{\mathbf{D}_{r,1}}\right], \tag{8}$$

$$\mathbf{ASV}_r'' = \left[\mathbf{B}_{r,1} - \frac{\left(\mathbf{P}_{r,12} - \mathbf{P}_{r,11}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)}{\left(\mathbf{P}_{r,22} - \mathbf{P}_{r,21}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)} \cdot \mathbf{B}_{r,2}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\mathbf{ASV}_{r,1} - \frac{\left(\mathbf{P}_{r,12} - \mathbf{P}_{r,11}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)}{\left(\mathbf{P}_{r,22} - \mathbf{P}_{r,21}\mathbf{D}_{r,1}^{-1}\mathbf{D}_{r,2}\right)} \mathbf{ASV}_{r,2}\right].$$

2. Знаходження параметрів системи рівнянь згорнутої математичної моделі підсхеми на схемотехнічному рівні.

Якщо прийняти $d\mathbf{x}_r/dt = 0$, тобто прирівняти нулю струми конденсаторів та напруги котушок індуктивностей, що на схемотехнічному рівні відповідає вилученню конденсаторів та закороченню котушок індуктивностей, тоді й вектор $d\mathbf{z}_r/dt = 0$. У цьому випадку, провівши відповідні матричні перетворення топологічних рівнянь, знаходимо вектор змінних $\mathbf{v}_r$ у формі $\mathbf{v}_r = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{SW}_r\mathbf{s}_r + \overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{w}_r$, де замінимо вектор $\mathbf{w}$, отриманий після модифікації підсхеми, за другим виразом формули (4)

$$\mathbf{v}_r = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{SW}_r\mathbf{s}_r + \overline{\mathbf{H}}_r\left(\mathbf{z}_r + \mathbf{ASW}_r\mathbf{s}_r + \mathbf{H}_r\mathbf{v}_r\right) =$$

$$= \overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{z}_r + \left(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{SW}_r + \overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{ASW}_r\right)\mathbf{s}_r + \overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{H}_r\mathbf{v}_r.$$

Так змінні зв'язку дорівнюють

$$\mathbf{v}_r = \frac{\overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{z}_r}{\left(1 - \overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{H}_r\right)} + \frac{\left(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{SW}_r + \overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{ASW}_r\right)\mathbf{s}_r}{\left(1 - \overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{H}_r\right)}.$$

Порівняння отриманих рівнянь з системою диференціальних рівнянь стану згорнутої підсхеми за умови $d\mathbf{z}_r/dt = 0$

$$0 = \mathbf{P}_r''\mathbf{z}_r + \mathbf{ASV}_r''\mathbf{s}_r + \mathbf{v}_r$$

надає вирази, з яких обчислюються відповідні матриці системи рівнянь стану згорнутої математичної моделі

$$\mathbf{P}_r'' = \left(\overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{H}_r - 1\right)^{-1}\overline{\mathbf{H}}_r,$$
$$\mathbf{ASV}_r'' = \left(\overline{\mathbf{H}}_r\mathbf{H}_r - 1\right)^{-1}\left(\overline{\mathbf{A}}\mathbf{SW}_r + \mathbf{H}_r\mathbf{ASW}_r\right). \tag{9}$$

Реалізація запропонованого варіанту в діючому алгоритмі не вимагає суттєвих змін, тому що необхідні матричні блоки формуються й для інших потреб. На деяких схемах, моделювання яких релаксаційними діакоптичними методами нестійке, підтверджена принципова можливість розв'язання проблеми нестійкості обчислювального процесу.

3. Алгоритм паралельного моделювання модифікованих підсхем. У методі роздільного інтегрування підсхем корекція додаткових змінних зв'язку $\mathbf{v}$ відбувається у наперед визначених точках корекції $T_{n+1} = T_n + H_{n+1}$, де H_{n+1} — крок корекції (рис. 3). На цьому кроці за необхідності підвищення точності моделювання уточнюються розв'язки за ітераційним виразом (3).

У методі роздільного інтегрування підсхем, модифікованих шляхом редукції частини з них у багатополюсник, обчислювальні ресурси, пов'язані з вектором $\mathbf{v}$, розподіляються між підсхемами (рис. 4).

Так само, як і в попередньому випадку, зберігається можливість інтегрування підсхем з різними кроками інтегрування і незалежної лінеаризації

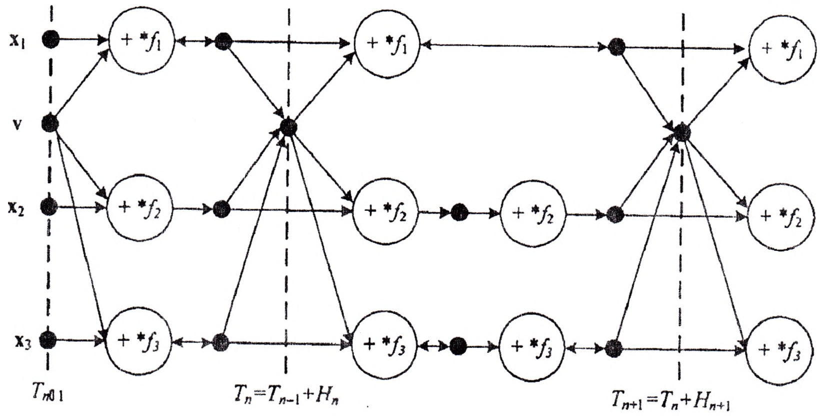

Рис. 3

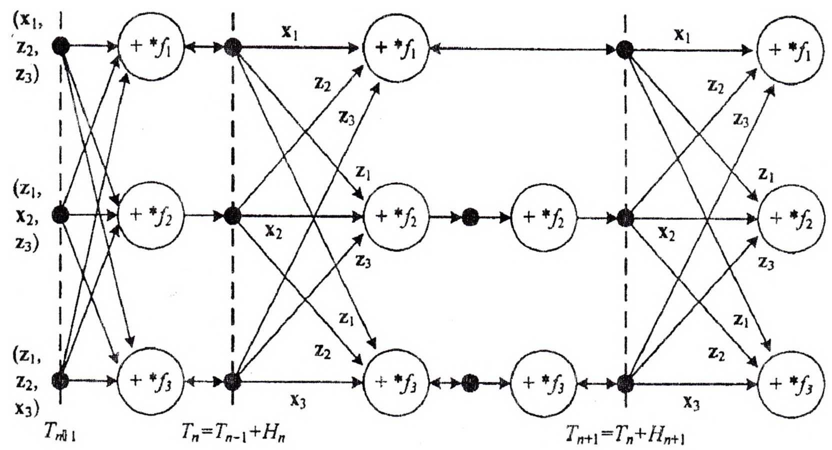

Рис. 4

системи нелінійних дискретизованих рівнянь.

Алгоритм паралельного моделювання модифікованих підсхем складається з кроків (вихідною позицією приймаємо часову точку T_n з відповідними значеннями векторів стану $\mathbf{x}_r(T_n)$).

1. Для кожної r-ої підсхеми незалежно обчислюється вектор $\mathbf{z}_r(T_n)$ за формулою (5) і пересилається до інших підсхем.

2. За формулами (8) чи (9) уточнюються параметри макромоделі кожної підсхеми у випадку їх залежності від значень змінних стану чи часу.

3. Моделюється незалежно одна від одної кожна підсхема на одному кроці інтегрування $h_{r,n+1}$ з метою визначення точки узгодження підсхем $H_{n+1} = \max\limits_{r=1}^{R} h_{r,n+1}$.

4. Проводиться додаткове інтегрування до точки узгодження тих підсхем, які мають власний крок, менший за крок узгодження H_{n+1}.

5. У випадку досягнення необхідної точності моделювання процес продовжується з п. 1 для часової точки $T_{n+1} = T_n + H_{n+1}$.

6. У протилежному випадку зменшується крок узгодження, і всі підсхеми повторно інтегруються на новому часовому інтервалі.

Розроблений алгоритм повністю відповідає основним вимогам паралелізації: чіткому розділенню паралельних і послідовних операцій за змінними стану підсхем, визначенню точки синхронізації процесів. Реалізація алгоритму на паралельних обчислювальних системах значно розширює клас задач зі складною структурою, які підлягають стійкому моделюванню з врахуванням динамічних та інерційних властивостей окремих частин з можливістю формування математичних моделей з їх фізичної природи.

1. *Рендзіняк С.Й.* Встановлення взаємних зв'язків підсхем та їх вплив на стійкість методу роздільного інтегрування // Теор. електротехніка. — 2004. — Вип. 57. — С. 38—49.

2. *Стахів П.Г., Рендзіняк С.Й.* Врахування взаємного динамічного впливу підсхем в діакоптичних релаксаційних методах розрахунку багатофункціональних систем // Электроника и связь. -- 1999. — Т. 2. — № 6. — С. 201—205.

3. *Стахів П.Г., Рендзіняк С.Й.* Паралельні діакоптичні методи розрахунку динамічних режимів складних електричних кіл // Техн. електродинаміка. Тем. вип. "Проблеми сучасної електротехніки" — 2006. — Ч. 6. — С. 9—14.

4. *Rendzinyak S., Stakhiv P.* New Algorithm of Subcircuits Matching in Multirate Method // Proc. of the XIII Intern. Symp. on Theoretical Electrical Engineering ISTET'05. Lviv, Ukraine. July 4-7. 2005. — Lviv. 2005. — P. 290—294.

Надійшла 20.12.2006