

УДК 621.746.047

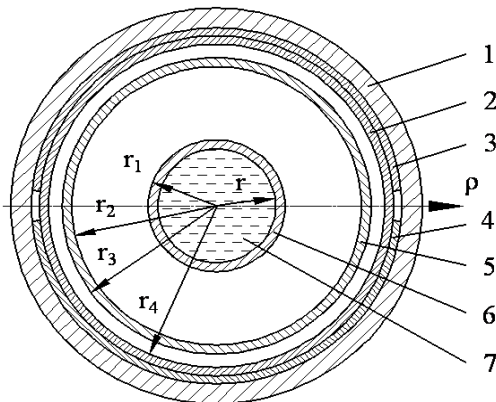
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ ТРЕХОБМОТОЧНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПЕРЕМЕШИВАТЕЛЯ

А.Н.Карлов, И.П.Кондратенко, докт.техн.наук, **А.П.Ращепкин**, докт.техн.наук,
 Институт электродинамики НАН Украины,
 пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина.

Разработана методика расчёта электромагнитных полей и энергетических показателей трёхобмоточных электромагнитных перемешивателей жидкого металла, выполненных с обмотками с фазной зоной 120°, в предположении о бесконечной длине их в осевом направлении. Распределение магнитного поля в полости перемешивателя определено при допущении, что аксиальная, радиальная и азимутальная составляющие движения жидкого металла равны нулю. Рассмотрены случаи согласного и встречного движения вращающегося магнитного поля для цилиндрической и двух дугостаторных машин, а также встречного движения полей дугостаторных машин. Библ. 5, рис. 1.

Ключевые слова: электромагнитное перемешивание, обмотка, непрерывное литье.

Введение. Применение в кристаллизаторах машин непрерывного литья заготовок [2,3] трехобмоточных перемешивателей с дугостаторными обмотками для полного заполнения в них пазов требует использования однослойных трехплоскостных концентрических или шаблонных простых обмоток, что значительно увеличивает размеры их лобовых частей и уменьшает активную высоту перемешивателя. Существенно уменьшить размер лобовых частей и тем самым увеличить активную высоту перемешивателя позволяет применение обмоток с фазной зоной 120°. Поэтому представляется обоснованным оценить энергетические показатели электромагнитных перемешивателей, выполненных с использованием таких обмоток.



В общем случае (рисунок) для внешнего расположения перемешивателя, в котором содержится шихтованный из электротехнической стали статор 1, кольцевая обмотка 2 и две обмотки дугостаторного типа 3 и 4, в полости расточки размещаются корпус кристаллизатора из немагнитной стали 5, медная гильза 6 и непосредственно жидкий металл 7. С наружной стороны гильзы с некоторым зазором устанавливается выполненная из нержавеющей немагнитной стали обечайка (на рисунке не показана). В образовавшемся канале с большой скоростью протекает вода и интенсивно охлаждает гильзу. С целью упрощения расчетов в электромагнитном анализе влияние обечайки будем учитывать эквивалентным увеличением электропроводности гильзы. В некоторых исполнениях

обечайка выполняется из пластических неэлектропроводных материалов, и тогда необходимость в такой корректировке отпадает.

Цель работы. Разработать методы расчета электромагнитных полей и усилий в жидком металле кристаллизатора под воздействием электромагнитного поля трехобмоточного перемешивателя с обмоткой с фазной зоной 120°.

Метод анализа. Электромагнитное поле в перемешивателе жидкого металла описывается системой уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

и материальными уравнениями

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

где \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{j} – векторы электромагнитного поля, \mathbf{v} – скорость движения среды, σ и μ – электропроводность и магнитная проницаемость, принимающие соответствующие значения для каждой из сред, находящейся в полости перемешивателя. Для решения системы уравнений (1) предполагается что μ , σ принимают постоянные значения для каждой среды. Тогда система (1) для векторного магнитного потенциала \mathbf{A} ($\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$), удовлетворяющего условию Кулоновской калибровки ($\text{div} \mathbf{A} = 0$), в предположении, что электрический потенциал равен нулю, так что $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$, сводится к уравнению вида

$$\Delta \mathbf{A} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \mu (\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}). \quad (2)$$

Так как ток в обмотках перемешивателя полагается гармоническим, то и векторный магнитный потенциал изменяется во времени по гармоническому закону ($\mathbf{A} = \dot{\mathbf{A}} e^{i\omega t}$), а уравнение (2) для комплексных амплитуд векторного магнитного потенциала преобразуется к виду

$$\Delta \dot{\mathbf{A}} = \sigma \mu i \omega \dot{\mathbf{A}} - \sigma \mu (\mathbf{v} \times \text{rot} \dot{\mathbf{A}}). \quad (3)$$

Уравнение (3) будем решать в цилиндрической системе координат в предположении, что машина имеет бесконечную длину по оси z . Из этого допущения следует, что $\partial / \partial z = 0$ и компоненты векторного потенциала $A_\varphi = 0$, $A_\rho = 0$. Тогда (3) для комплексной амплитуды A_z составляющей векторного магнитного потенциала сводится к уравнению вида (в дальнейшем точку над комплексными амплитудами компонент электромагнитного поля опускаем)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} - i \mu \sigma \omega A_z + \sigma \mu (v_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} + v_\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho}) = 0, \quad (4)$$

в котором v_φ и v_ρ отличны от нуля лишь в области жидкого металла. В предположении, что индуцированное магнитное поле токами, обусловленными движением жидкого металла в магнитном поле, оказывается незначительным, можно в (4) принять скорость движения металла в кристаллизаторе равной нулю ($v_\varphi = v_\rho = 0$). В результате введенных допущений к уравнению (4) для z -составляющей векторного магнитного потенциала может быть применено дискретное преобразование Фурье по переменной φ [1].

Прямое интегральное преобразование Фурье представляется формулой

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_z e^{in\varphi} d\varphi, \quad (5)$$

где A – преобразованное значение векторного магнитного потенциала A_z , n – параметр преобразования Фурье.

Применяя преобразование вида (5) к уравнению (4), получим

$$\rho^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial A}{\partial \rho} - (n^2 + i \mu \sigma \rho^2 \omega) A = 0. \quad (6)$$

Для каждой рассматриваемой области уравнение (6) имеет собственное решение. Так для воздушной области между ротором статора и корпусом кристаллизатора ($r_4 > \rho > r_3$) с учетом того, что $\sigma = 0$, решение уравнения (6) примет вид

$$A_1 = C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}. \quad (7)$$

В теле корпуса кристаллизатора ($r_2 < \rho < r_3$) общее решение уравнения (6) дается модифицированными функциями Бесселя

$$A_2 = C_3 I_n(a_1 \rho) + C_4 K_n(a_1 \rho), \quad a_1 = \sqrt{i \mu \sigma_k \omega}, \quad (8)$$

где μ и σ_k – магнитная проницаемость и электропроводность корпуса кристаллизатора, который обычно выполняется из немагнитной нержавеющей стали.

В воздушной среде между корпусом и гильзой кристаллизатора ($r_1 < \rho < r_2$) уравнение (6) имеет такое решение

$$A_3 = C_5 \rho^n + C_6 \rho^{-n}, \quad (9)$$

а в гильзе кристаллизатора $r < \rho < r_1$

$$A_4 = C_7 I_n(a_2 \rho) + C_8 K_n(a_2 \rho), \quad a_2 = \sqrt{i \mu_m \sigma_m \omega}, \quad (10)$$

где μ_m и σ_m – магнитная проницаемость и электрическая проводимость гильзы кристаллизатора.

Найденные решения сопрягаются на границах раздела сред согласно граничным условиям электродинамики – равенства нормальных составляющих индукции и тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля. Для магнитного векторного потенциала условия сопряжения принимают вид

$$A(\rho + 0) = A(\rho - 0), \quad \frac{\partial A(\rho + 0)}{\partial \rho} = \frac{\partial A(\rho - 0)}{\partial \rho}. \quad (11)$$

Для определения неизвестных коэффициентов приведенных решений для преобразованных значений векторного магнитного потенциала в рассматриваемых областях будем полагать, что рабочая область ограничена ферромагнитной областью, магнитная проницаемость которой равна бесконечности, и сосредоточенная на поверхности гладкого статора токовая нагрузка A_m перемешивателя известна.

Используя граничное условие при $\rho = r_4$ $\partial A / \partial \rho = -B_\varphi$, где $B_\varphi = -A_m \mu_0$ [5], освободимся, полагая B_φ известной, от одной постоянной интегрирования в решении (7)

$$A_1 = -\frac{B_\varphi}{n} \frac{\rho^n}{r_4^{n-1}} + \frac{C_2}{r_4^{2n}} \rho^n \left(1 + \frac{r_4^{2n}}{\rho^{2n}}\right). \quad (12)$$

Здесь азимутальная составляющая индукции B_φ и токовая нагрузка A_m полагаются преобразованными по формуле (5).

Используя в условиях сопряжения (11) найденные решения (12) и (8) на границе раздела $\rho = r_3$, установим связь между постоянными интегрирования из уравнения (8)

$$C_3 b + C_4 d = -2 B_\varphi \frac{r_3^{n-1}}{r_4^{n-1}} = C_{11}. \quad (13)$$

В (13) введены обозначения

$$b = \frac{n}{r_3} \left(1 - \frac{r_3^{2n}}{r_4^{2n}}\right) I_n(a_1 r_3) + \left(1 + \frac{r_3^{2n}}{r_4^{2n}}\right) \partial I_n(a_1 r_3) / \partial r_3, \quad d = \frac{n}{r_3} \left(1 - \frac{r_3^{2n}}{r_4^{2n}}\right) K_n(a_1 r_3) + \left(1 + \frac{r_3^{2n}}{r_4^{2n}}\right) \partial K_n(a_1 r_3) / \partial r_3. \quad (14)$$

На основе установленной связи (13) найдем согласно (8) распределение магнитного потенциала в корпусе кристаллизатора $r_2 < \rho < r_3$

$$A_2 = C_{11} I_n(a_1 \rho) / b - C_4 (I_n(a_1 \rho) d / b - K_n(a_1 \rho)). \quad (15)$$

Аналогично, удовлетворяя на границе раздела сред $\rho = r_2$ решения (15) и (9) условиям сопряжения (11), найдем, что

$$C_5 = C_{11} / (r_2 P) - C_6 Q / P,$$

$$\text{где } P = r_2^n \left(d \frac{\partial I_n(a_1 r_2)}{\partial r_2} - b \frac{\partial K_n(a_1 r_2)}{\partial r_2} - \frac{n}{r_2} (d I_n(a_1 r_2) - b K_n(a_1 r_2)) \right),$$

$$Q = r_2^{-n} \left(d \frac{\partial I_n(a_1 r_2)}{\partial r_2} - b \frac{\partial K_n(a_1 r_2)}{\partial r_2} + \frac{n}{r_2} (d I_n(a_1 r_2) - b K_n(a_1 r_2)) \right), \quad (16)$$

и, следовательно, согласно (9)

$$A_3 = C_{11} \rho^n / (r_2 P) + C_6 (\rho^{-n} - \rho^n Q / P). \quad (17)$$

Используя граничные условия (11) при $\rho = r_1$ установим связь между коэффициентами интегрирования C_7 и C_8 :

$$C_7 M + C_8 N = 2C_{11} n / (r_1 r_2),$$

где

$$\begin{aligned} M &= \frac{n}{r_1} (Pr_1^{-n} + Qr_1^n) I_n(a_2 r_1) + (Pr_1^{-n} - Qr_1^n) \frac{\partial I_n(a_2 r_1)}{\partial r_1}, \\ N &= \frac{n}{r_1} (Pr_1^{-n} + Qr_1^n) K_n(a_2 r_1) + (Pr_1^{-n} - Qr_1^n) \frac{\partial K_n(a_2 r_1)}{\partial r_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом соотношений (18) решение (10) и его производная по ρ с точностью до неопределенного коэффициента C_8 равны

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{2C_{11} n}{r_1 r_2 M} I_n(a_2 \rho) + C_8 (K_n(a_2 \rho) - \frac{N}{M} I_n(a_2 \rho)); \\ \frac{\partial A_4}{\partial \rho} &= \frac{2C_{11} n}{r_1 r_2 M} \frac{\partial I_n(a_2 \rho)}{\partial \rho} + C_8 (\frac{\partial K_n(a_2 \rho)}{\partial \rho} - \frac{N}{M} \frac{\partial I_n(a_2 \rho)}{\partial \rho}). \end{aligned} \quad (19)$$

Освобождаясь в системе уравнений (19) от слагаемых, содержащих C_8 , найдем граничное условие, которому согласно (11) должно удовлетворять решение уравнения (6) в области жидкого металла при $\rho = r$

$$\frac{\partial A_5}{\partial \rho} (MK_n(a_2 \rho) - NI_n(a_2 \rho)) - A_5 (M \frac{\partial K_n(a_2 \rho)}{\partial \rho} - N \frac{\partial I_n(a_2 \rho)}{\partial \rho}) = \frac{2C_{11} n}{r r_1 r_2}. \quad (20)$$

Ограниченное в области жидкого металла ($0 < \rho < r$) решение уравнения (6), удовлетворяющее граничному условию (20) при скорости $v_\varphi = v_\rho = 0$, описывается зависимостью

$$A_5 = C_9 I_n(a_3 \rho), \quad a_3 = \sqrt{i \mu \sigma \omega}, \quad (21)$$

$$C_9 = \left(\frac{2C_{11} n}{r r_1 r_2} \right) / \left[\frac{\partial I_n(a_3 \rho)}{\partial \rho} (M K_n(a_3 \rho) - N I_n(a_3 \rho)) - I_n(a_3 \rho) \left(M \frac{\partial K_n(a_3 \rho)}{\partial \rho} - N \frac{\partial I_n(a_3 \rho)}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho=r},$$

где σ – электропроводность и $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость жидкого металла.

Из первого условия сопряжения (11), полагая известным при $\rho = r$ значение по (21) векторного магнитного потенциала $A_5(r)$, из первого равенства (19) найдем постоянную C_8

$$C_8 = \frac{A_5(r) M - 2C_{11} n I_n(a_2 r) / (r_1 r_2)}{MK_n(a_2 r) - NI_n(a_2 r)}. \quad (22)$$

Определив по (19) величину векторного магнитного потенциала $A_4(r_1)$ при $\rho = r_1$, найдем из (17)

$$C_6 = \frac{A_4(r_1) P - C_{11} r_1^n / r_2}{Pr_1^{-n} - Qr_1^n}. \quad (23)$$

Полагая известной по (17) величину векторного магнитного потенциала $A_3(r_2)$ при $\rho = r_2$, найдем из (15)

$$C_4 = \frac{bA_3(r_2) - C_{11} I_n(a_1 r_2)}{bK_n(a_1 r_2) - dI_n(a_1 r_2)}. \quad (24)$$

Аналогичным образом, полагая известной по (15) величину векторного магнитного потенциала $A_2(r_3)$ при $\rho = r_3$, найдем из (12)

$$C_2 = \frac{A_2(r_3) r_3^n + B_\varphi r_3^{2n} / (nr_4^{n-1})}{1 + r_3^{2n} / r_4^{2n}}. \quad (25)$$

Следовательно, согласно (12) векторный магнитный потенциал $A_1(r_4)$ при $\rho = r_4$ равен

$$A_1(r_4) = -B_\varphi r_4 / n + 2C_2 / r_4^n. \quad (26)$$

Полученные зависимости распределения векторного магнитного потенциала в полости перемешивателя найдены с точностью до постоянной B_φ (13). Она определяется суммарным действием токовых нагрузок всех обмоток A_m , размещенных на поверхности расточки $\rho = r_4$ (12).

Для $2p$ -полюсной обмотки перемешивателя, размещенной на всей поверхности расточки магнитопровода ($-\pi < \varphi < \pi$) в предположении, что фазная зона фазы A начинается при значении $\varphi = -\pi + \varphi_A$, все катушки обмотки имеют идентичное исполнение и сдвинуты в пределах фазной зоны на одинаковый угол $\pi t_z / p\tau$, но в общем случае катушки разных фаз имеют различное количество витков s_A, s_B, s_C и пространственный шаг y_A, y_B, y_C , токовую нагрузку фазы A можно представить обобщенной функцией

$$i_{zA} = \frac{i_A s_A}{b_n} \sum_{k=1}^q \sum_{s=1}^p \left(\theta(r_4(\varphi + \pi - \varphi_A - T(k, s) + \frac{b_n}{2r_4}) - \theta(r_4(\varphi + \pi - \varphi_A - T(k, s) - \frac{b_n}{2r_4}) - \theta(r_4(\varphi + \pi - \varphi_A - T(k, s) + \frac{b_n}{2r_4} - \frac{y_A}{r_4}) + \theta(r_4(\varphi + \pi - \varphi_A - T(k, s) + \frac{b_n}{2r_4} - \frac{y_A}{r_4}))), \right. \quad (27)$$

$$T(k, s) = \frac{2k-1}{2r_4} t_z + 2(s-1)\pi / p.$$

Аналогичное представление имеют токовые нагрузки фаз B и C

$$i_{zB} = i_{zA}(i_A \rightarrow i_B, s_A \rightarrow s_B, \varphi_A \rightarrow \varphi_B, y_A \rightarrow y_B), \quad (28)$$

$$i_{zC} = i_{zA}(i_A \rightarrow i_C, s_A \rightarrow s_C, \varphi_A \rightarrow \varphi_C, y_A \rightarrow y_C).$$

Здесь i_A, i_B, i_C – амплитудные величины фазных токов, q – число пазов на полюс и фазу, p – число пар полюсов обмотки, m – число фаз обмотки, b_n – ширина открытия паза, r_4 – радиус расточки статора, $\theta(z)$ – единичная обобщенная функция, равная нулю при $z < 0$ и единице – при $z > 0$. Представление $f(a \rightarrow b)$ означает замену в этом выражении величины a на b .

Полюсное деление, шаг обмотки и зубцовое деление

$$\tau = \pi r_4 / p, \quad y_A = 2qt_z, \quad t_z = 2\pi r_4 / (pqm(2+1)). \quad (29)$$

Пространственный сдвиг фаз B и C (φ_B и φ_C) определяются через φ_A соответствующим сдвигом на 120° относительно друг друга:

$$\varphi_B = \varphi_A + 2\pi / (pm), \quad \varphi_C = \varphi_A + 4\pi / (pm), \quad \varphi_A = k\pi / (pm), \quad k = 0 \dots 2m. \quad (30)$$

Применяя к (27), (28) дискретное интегральное преобразование Фурье (5), найдем преобразованное значение токовой нагрузки $2p$ -полюсной обмотки

$$I(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi} (i_{zA} + i_{zB} + i_{zC}) d\varphi = I_A(n) + I_B(n) + I_C(n),$$

$$I_A(n) = i_A w_A k_A / (2\pi r_4), \quad I_B(n) = i_B w_B k_B / (2\pi r_4), \quad I_C(n) = i_C w_C k_C / (2\pi r_4), \quad (31)$$

$$w_A = s_A p q, \quad w_B = s_B p q, \quad w_C = s_C p q,$$

$$k_A = e^{in(-\pi + \varphi_A + t_z q / (2r_4))} (1 - e^{in \cdot y_A / r_4}) \frac{\sin \frac{nb_n}{2r_4} \sin \frac{nt_z q}{2r_4}}{\frac{nb_n}{2r_4} q \sin \frac{nt_z}{2r_4}} \sum_{s=1}^p (e^{2in\pi(s-1) / p} / p),$$

$$k_B = k_A(\varphi_A \rightarrow \varphi_B, y_A \rightarrow y_B), \quad k_C = k_A(\varphi_A \rightarrow \varphi_C, y_A \rightarrow y_C).$$

Применительно к дугостаторной $2p_1$ -полюсной обмотке, размещенной на дуге статора $-\pi < \varphi < 0$, с традиционным следованием фазных зон в пределах пары полюсов ($A - x, B - y, C - z$), полагая, что обмотка начинается с фазной зоны фазы A , распределение фазных токов по поверхности расточки описывается зависимостью

$$i_{1zA} = \frac{i_A s_{1A}}{b_n} \sum_{k=1}^{q_1} \sum_{s=1}^{p_1} (\theta(r_4(\varphi - \varphi_{1A} + \pi - T(k, s) + \frac{b_n}{2r_4}) - \theta(r_4(\varphi - \varphi_{1A} + \pi - T(k, s) - \frac{b_n}{2r_4}) - \theta(r_4(\varphi - \varphi_{1A} + \pi - T(k, s) + \frac{b_n}{2r_4} - \frac{y_{1A}}{r_4}) + \theta(r_4(\varphi - \varphi_{1A} + \pi - T(k, s) + \frac{b_n}{2r_4} - \frac{y_{1A}}{r_4}))), \quad (32)$$

$$T(k, s) = \frac{2k-1}{2r_4} t_z + 2(s-1)\pi / p_1.$$

$$i_{1zB} = i_{1zA}(i_A \rightarrow i_B, s_{1A} \rightarrow s_{1B}, y_{1A} \rightarrow y_{1B}), \quad i_{1zC} = i_{1zA}(i_A \rightarrow i_C, s_{1A} \rightarrow s_{1C}, y_{1A} \rightarrow y_{1C}).$$

Здесь p_1, q_1 – число пар полюсов и количество пазов на полюс и фазу дугостаторной обмотки, s_{1A}, s_{1B}, s_{1C} – количество проводников в пазу и y_{1A}, y_{1B}, y_{1C} – шаг катушек фаз A, B и C соответственно. Зубцовый шаг и раскрытие паза сохраняют прежние значения. Следовательно, количество пазов на полюс и фазу дугостаторной обмотки равно $q_1 = pq/(2p_1)$.

При указанном следовании фазных зон пространственные сдвиги фаз B и C относительно фазы A на 120° определяются так

$$\varphi_{1B} = \varphi_{1A} + \pi/(mp_1), \quad \varphi_{1C} = \varphi_{1A} + 2\pi/(mp_1), \quad \varphi_{1A} = 0.$$

Преобразованное значение токовой нагрузки $2p_1$ -полюсной обмотки равно

$$I_1(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{in\varphi} (i_{1zA} + i_{1zB} + i_{1zC}) d\varphi = I_{1A}(n) + I_{1B}(n) + I_{1C}(n),$$

$$I_{1A}(n) = i_A w_{1A} k_{1A} / (2\pi r_4), \quad I_{1B}(n) = i_B w_{1B} k_{1B} / (2\pi r_4), \quad I_{1C}(n) = i_C w_{1C} k_{1C} / (2\pi r_4),$$

$$w_{1A} = s_{1A} p_1 q_1, \quad w_{1B} = s_{1B} p_1 q_1, \quad w_{1C} = s_{1C} p_1 q_1,$$

$$k_{1A} = e^{in(-\pi + \varphi_{1A} + t_z q_1 / (2r_4))} (1 - e^{in y_{1A} / r_4}) \frac{\sin \frac{nb_n}{2r_4} \sin \frac{nt_z q_1}{2r_4}}{\frac{nb_n}{2r_4} q_1 \sin \frac{nt_z}{2r_4}} \sum_{s=1}^{p_1} \left(e^{in\pi(s-1)/p_1 / p_1} \right), \quad (33)$$

$$k_{1B} = k_{1A}(\varphi_{1A} \rightarrow \varphi_{1B}, y_{1A} \rightarrow y_{1B}), \quad k_{1C} = k_{1A}(\varphi_{1A} \rightarrow \varphi_{1C}, y_{1A} \rightarrow y_{1C}).$$

Для $2p_2$ -полюсной обмотки, размещенной на дуге статора $0 < \varphi < \pi$, с традиционным следованием фазных зон в пределах пары полюсов ($A - x, B - y, C - z$), полагая, что обмотка начинается с фазной зоны фазы A , распределение фазных токов по поверхности рашотки описывается зависимостью

$$i_{2zA} = \frac{i_A s_{2A}}{b_n} \sum_{k=1}^{q_2} \sum_{s=1}^{p_2} (\theta(r_4(\varphi - \varphi_{2A} - T(k, s) + \frac{b_n}{2r_4}) - \theta(r_4(\varphi - \varphi_{2A} - T(k, s) - \frac{b_n}{2r_4}) - \theta(r_4(\varphi - \varphi_{2A} - T(k, s) + \frac{b_n}{2r_4} - \frac{y_{2A}}{r_4}) + \theta(r_4(\varphi - \varphi_{2A} - T(k, s) + \frac{b_n}{2r_4} - \frac{y_{2A}}{r_4}))), \quad (34)$$

$$T(k, s) = \frac{2k-1}{2r_4} t_z + 2(s-1)\pi / p_2.$$

$$i_{2zB} = i_{2zA}(i_A \rightarrow i_B, s_{2A} \rightarrow s_{2B}, y_{2A} \rightarrow y_{2B}), \quad i_{2zC} = i_{2zA}(i_A \rightarrow i_C, s_{2A} \rightarrow s_{2C}, y_{2A} \rightarrow y_{2C}).$$

Здесь p_2, q_2 – число пар полюсов и количество пазов на полюс и фазу второй дугостаторной обмотки, s_{2A}, s_{2B}, s_{2C} – количество проводников в пазу и y_{2A}, y_{2B}, y_{2C} – шаг катушек фаз A, B и C соответственно. Зубцовый шаг и раскрытие паза сохраняют прежние значения. Следовательно, количество пазов на полюс и фазу второй дугостаторной обмотки равно

$$q_2 = pq/(2p_2).$$

Пространственные сдвиги фазных зон фаз B и C относительно фазы A для этой обмотки будут определяться такими соотношениями:

$$\varphi_{2B} = \varphi_{2A} + \pi / (m p_2), \quad \varphi_{2C} = \varphi_{2A} + 2\pi / (m p_2), \quad \varphi_{2A} = 0.$$

Преобразованное значение токовой нагрузки $2p_2$ -полюсной обмотки равно

$$I_2(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{in\varphi} (i_{2zA} + i_{2zB} + i_{2zC}) d\varphi = I_{2A}(n) + I_{2B}(n) + I_{2C}(n),$$

$$I_{2A}(n) = i_A w_{2A} k_{2A} / (2\pi r_4), \quad I_{2B}(n) = i_B w_{2B} k_{2B} / (2\pi r_4), \quad I_{2C}(n) = i_C w_{2C} k_{2C} / (2\pi r_4),$$

$$w_{2A} = s_{2A} p_2 q_2, \quad w_{2B} = s_{2B} p_2 q_2, \quad w_{2C} = s_{2C} p_2 q_2,$$

$$k_{2A} = e^{in(\varphi_{2A} + t_z q_2 / (2r_4))} (1 - e^{iny_{2A} / r_4}) \frac{\sin \frac{nb_n}{2r_4} \sin \frac{nt_z q_1}{2r_4}}{\frac{nb_n}{2r_4} q_1 \sin \frac{nt_z}{2r_4}} \sum_{s=1}^{p_1} (e^{in\pi(s-1) / p_2} / p_2), \quad (35)$$

$$k_{2B} = k_{2A}(\varphi_{2A} \rightarrow \varphi_{2B}, y_{2A} \rightarrow y_{2B}), \quad k_{2C} = k_{2A}(\varphi_{2A} \rightarrow \varphi_{2C}, y_{2A} \rightarrow y_{2C}).$$

Преобразованное по Фурье (5) амплитудное значение токовой нагрузки трехобмоточного электромагнитного перемешивателя равно

$$A_m = I(n) + I_1(n) + I_2(n). \quad (36)$$

Следовательно, согласно (12) однозначно определена в зависимости от токовой нагрузки азимутальная составляющая магнитной индукции на поверхности раторки

$$B_\varphi = -\mu_0 A_m. \quad (37)$$

Найденные соотношения позволяют в зависимости от конструктивного исполнения обмоток и электрических схем их соединения найти распределение векторного магнитного потенциала в полости перемешивателя, компоненты магнитной индукции и индуцированные плотности тока в проводящих средах. Будем полагать, что фазные обмотки $2p$ -полюсной и обеих дугостаторных машин включены последовательно, так что фазные токи их имеют одинаковую величину. Тогда суммарный обмоточный коэффициент дугостаторных машин при согласном их включении по схеме $(A-x, B-y, C-z, A-x, B-y, C-z)$ и при встречном включении по схеме $(A-x, B-y, C-z, A-x, C-z, B-y)$, поскольку для изменения направления вращения магнитного поля достаточно в схеме соединения обмоток поменять между собой местами две фазы, равен соответственно

$$k_{3A} = k_{1A} + k_{2A}, \quad k_{3B} = k_{1B} + k_{2B}, \quad k_{3C} = k_{1C} + k_{2C}. \quad (38)$$

$$k_{3A} = k_{1A} + k_{2A}, \quad k_{3B} = k_{1C} + k_{2C}, \quad k_{3C} = k_{1B} + k_{2B}. \quad (39)$$

$$k_{3A} = k_{1A} + k_{2A}, \quad k_{3B} = k_{1B} + k_{2C}, \quad k_{3C} = k_{1C} + k_{2B}. \quad (40)$$

При $w_{1A,B,C} = w_{2A,B,C}$ результирующую токовую нагрузку трехобмоточного электромагнитного перемешивателя можно представить в виде

$$A_m = (i_A (k_A w_A + k_{3A} w_{1A}) + i_B (k_B w_B + k_{3B} w_{1B}) + i_C (k_C w_C + k_{3C} w_{1C})) / (2\pi r_4). \quad (41)$$

Тогда при согласном направлении вращения магнитных полей $2p$ -полюсной и дугостаторных машин в (41) коэффициенты $k_{3A,B,C}$ следует вычислять по формуле (38). При встречном направлении вращения магнитных полей $2p$ -полюсной и обеих дугостаторных машин в (41) коэффициенты $k_{3A,B,C}$ следует выбрать по формуле (39). Если же $2p$ -полюсная машина работает в паре с дугостаторными машинами с разносторонним направлением вращения магнитных полей, то в (41) коэффициенты $k_{3A,B,C}$ следует выбрать по формуле (40).

Обратное преобразование Фурье дает возможность найти векторный магнитный потенциал

$$A_{zj} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_j e^{-in\varphi + i\omega t}, \quad (41)$$

где $j = 1, 2, 3, 4, 5$ – порядковый номер решений (7), (8), (9), (10), (21) соответственно.

При этом составляющие индукции $B_{\rho j}, B_{\varphi j}$ в соответствующей среде принимают вид

$$B_{\rho j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{zj}}{\partial \varphi} = \frac{-i}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n A_j e^{-in\varphi + i\omega t}, \quad (42)$$

$$B_{\varphi j} = -\frac{\partial A_{zj}}{\partial \rho} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A_j}{\partial \rho} e^{-in\varphi + i\omega t}. \quad (43)$$

Плотность тока в электропроводных средах определяется из последнего уравнения системы (1), уравнениями (42), (43) и $E = -i\omega A_{zj}$

$$j_{zj} = \sigma[-i\omega A_{zj} - v_{\varphi} B_{\rho j} - v_{\rho} B_{\varphi j}] = -\frac{\sigma i}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\omega\rho - nv_{\varphi}) A_j e^{-in\varphi + i\omega t} + \sigma v_{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A_j}{\partial \rho} e^{-in\varphi + i\omega t}. \quad (44)$$

Плотность тока в корпусе и гильзе кристаллизатора определяется аналогично (44) с учетом, что для них $v_{\varphi} = v_{\rho} = 0$. Впрочем, в приведенной постановке это равенство удовлетворяется и в области жидкого металла.

С использованием полученных зависимостей (42), (43), (44) для определения компонент магнитной индукции и плотности тока в проводящих средах распределение средних во времени объемных электродинамических усилий под действием комбинированных бегущих полей в электропроводных средах равно

$$F_{\varphi j} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(j_{zj} B_{\rho j}^*) = -\frac{\sigma_j \omega}{2\rho} \operatorname{Re}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_j e^{-in\varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n A_j^* e^{in\varphi}\right), \quad (45)$$

$$F_{\rho j} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(j_{zj} B_{\varphi j}^*) = -\frac{\sigma_j \omega}{2} \operatorname{Re}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_j e^{-in\varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A_j}{\partial \rho} e^{in\varphi}\right).$$

Здесь знак (*) означает комплексно сопряженную величину, а $\operatorname{Re}(z)$ определяет действительную часть комплексной величины.

Электромагнитная мощность перемешивателя определяется с использованием понятия плотности потока электромагнитной энергии Умова-Пойтинга [5] путем интегрирования ее по поверхности ротора перемешивателя

$$S_e = \frac{r_4}{2} \int_0^c \int_{-\pi}^{\pi} E_z H_{\varphi}^* dz d\varphi, \quad (46)$$

где c – высота магнитопровода перемешивателя. Учитывая, что E_z и H_{φ} в принятом модельном представлении не зависят от координаты z , при $\rho = r_4$ получаем

$$E_z = -i\omega A_{z1} = -i\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_1 e^{-in\varphi + i\omega t}. \quad (47)$$

После подстановки E_z в (46), учитывая, что $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\varphi} H_{\varphi}^* d\varphi = -A_m^*$, где A_m^* – комплексно

сопряженное значение токовой нагрузки перемешивателя (41), найдем

$$S_e = i\omega c \pi r_4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_1 A_m^*. \quad (48)$$

Разделяя токовую нагрузку A_m на составляющие по фазам результирующей токовой нагрузки либо отдельно по фазам каждой из трех обмоток согласно представлению (41), по (48) имеется возможность определить электромагнитные мощности отдельных фаз каждой из обмоток, которые в общем случае могут различаться между собой в связи с воздействием продольного краевого эффекта

дугостаторных обмоток. Потребляемая перемешивателем мощность намного превышает электромагнитную мощность. Обусловлено это потерями в активных и реактивных сопротивлениях обмоток, электрические параметры которых в зависимости от конструктивного исполнения определяются по известным в теории электрических машин формулам [4].

Заключение. На основе разработанной математической модели трехобмоточного электромагнитного перемешивателя с пространственным сдвигом фаз обмоток на 120° выведены функциональные зависимости для определения энергетических показателей перемешивателя и силового действия на жидкий металл без использования обратных интегральных преобразований.

1. Гахов Ф.И., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.

Gakhov F.I., Cherskii Yu.I. Equation of convolution type. – Moskva: Nauka, 1978. – 296 p. (Rus.)

2. Карлов А.Н., Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Расчет электромагнитного поля в цилиндрическом кристаллизаторе многообмоточного электромагнитного перемешивателя жидкого металла // Техн. електродинаміка. – 2009. – №4. – С. 61–65.

Karlov A.N., Kondratenko I.P., Rashchepkin A.P. Computation of an electromagnetic field in a cylindrical crystallizer of a multi-windings electromagnetic mixer of liquid metal // Tekhnichna elektrodynamika. – 2009. – №4. – P. 61–65. (Rus.)

3. Карлов А.Н., Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Метод расчета электродинамических сил в цилиндрических кристаллизаторах под действием комбинированных бегущих полей // Техн. електродинаміка. – 2009. – №5. – С. 56–62.

Karlov A.N., Kondratenko I.P., Rashchepkin A.P. The method of electrodynamic forces computation in cylindrical crystallizers under the influence of the combined travelling fields // Tekhnichna elektrodynamika. – 2009. – №5. – P. 56–62. (Rus.)

4. Проектирование электрических машин: Учеб. пособие для вузов / И.П.Копылов, Ф.А.Горяинов, Б.К.Клоков и др.; Под ред. И.П.Копылова. – М.: Энергия, 1980. – 496 с.

Designing of electrical machines: Tutorial for technical colleges / I.P.Kopylov, F.A.Goriainov, B.K.Klokov, etc.; ed. I.P.Kopylova. – Moskva: Energiia, 1980. – 496 p. (Rus.)

5. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.

Tamm I.E. Fundamentals of the theory of electricity. – Moskva: Nauka, 1976. – 616 p. (Rus.)

УДК 621.746.047

**О.М.Карлов, І.П.Кондратенко, докт.техн.наук, А.П.Ращепкін, докт.техн.наук,
Інститут електродинаміки НАН України,
пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна.**

Магнітне поле та електродинамічні сили триобмоткового електромагнітного перемішувача

Розроблено методику розрахунку електромагнітних полів і енергетичних показників триобмоткових електромагнітних перемішувачів рідкого металу, виконаних з обмотками з фазною зоною 120° , у припущенні про нескінченну довжину їх в осьовому напрямі. Розподіл магнітного поля в порожнині перемішувача визначено при припущенні, що аксіальна, радіальна і азимутна складові руху рідкого металу дорівнюють нулю. Розглянуто випадки узгодженого і зустрічного руху обертового магнітного поля для циліндричної і двох дугостаторних машин, та зустрічного руху полів дугостаторних машин. Бібл. 5, рис. 1.

Ключові слова: електромагнітне перемішування, обмотка, безперервне лиття.

**A.N.Karlov, I.P.Kondratenko, A.P.Rashchepkin,
Institute of Electrodynamics of National Academy of Sciences of Ukraine,
Peremogy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine.**

Magnetic field and electrodynamic forces of three-winding electromagnetic stirrer

The calculation method of electromagnetic fields and power parameters of liquid metal three-winding electromagnetic stirrers executed with phase zone 120° windings, in the assumption of the infinite length in an axial direction has been developed. Magnetic field distribution in a cavity of stirrer is defined at an assumption that axial, radial and azimuthally components of liquid metal flow are vanished. Cases of concordant and opposing motion of rotating magnetic field for a circular and two arc-type machines, as well as opposing motion of fields for arc-type machines have been considered. References 5, figure 1.

Keywords: electromagnetic stirring, winding, continuous casting.

Надійшла 23.11.2010
Received 23.11.2010