

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВОЙНОГО РЯДА ФУРЬЕ ДЛЯ РАСЧЕТА СПЕКТРА МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Е.В.Вербицкий, канд.техн.наук
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,
пр. Победы, 37, Киев, 03056, Украина,
e-mail: verbitskiy@bigmir.net

Обоснована целесообразность использования двойного ряда Фурье для расчета спектра модулированных сигналов. Описаны ограничения его применения для отфильтрованных сигналов. Предложена методика совместного применения рядов Фурье одной и двух переменных, основанная на методе наложения, которая позволяет получить спектральную характеристику сигнала в свернутой форме. Библ. 2, рис. 2.

Ключевые слова: импульсная модуляция, двойной ряд Фурье, спектральная характеристика.

Импульсная модуляция находит широкое применение в устройствах силовой электроники, что обусловлено простотой реализации и возможностью достижения высокого КПД. При формировании выходного синусоидального сигнала период T несущего сигнала, как правило, значительно меньше периода Θ выходного синусоидального сигнала ($T \ll \Theta$), что при использовании ряда Фурье одной переменной обуславливает громоздкость расчетов в связи с необходимостью суммирования спектра каждого периода несущего сигнала. Применение ряда Фурье двух переменных [2] позволяет представить частотную характеристику модулированного выходного напряжения в свернутой, то есть более удобной форме. После прохождения выходного модулированного напряжения через выходной фильтр преобразователя его частотная характеристика изменяется, но именно она и представляет интерес, так как определяет параметры выходного напряжения и качество работы фильтра. Непосредственное определение реакции фильтра по составляющим двойного ряда Фурье является трудоемкой процедурой. В статье рассмотрена методика совместного применения рядов Фурье одной и двух переменных для расчета спектральных характеристик, что значительно уменьшает количество математических вычислений.

Методика основывается на методе наложения, что позволяет представить суммарную реакцию $x_M(t)$ фильтра при воздействии на него широтно-модулированных сигналов как суперпозицию реакции на каждый импульс модуляции $x_i(t)$ с несущей частотой ω

$$x_M(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t + i2\pi / \omega), \quad (1)$$

где N – количество импульсов широтно-импульсной модуляции (ШИМ).

Реакция на каждый импульс состоит из двух частей (рис. 1). На интервале длительности i -го импульса ($T_i, T_i + t_i$) реакция цепи $x_i(t)$ находится с помощью интеграла Дюамеля [1]

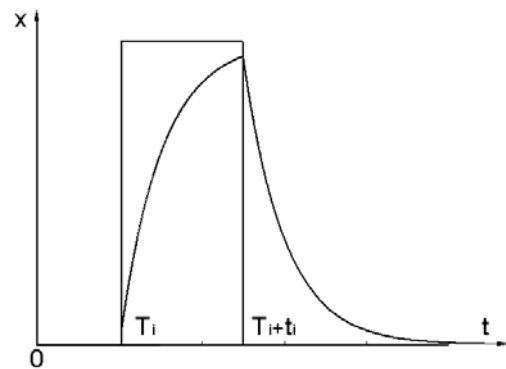


Рис. 1

$$x_i(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} V(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где e^A – матричная экспонента электрической цепи, $V(t)$ – внешнее воздействие.

На интервале, начинающемся после окончания импульса и длящемся до конца периода модулированного сигнала ($T_i + t_i; \Theta$), в цепи протекает свободный процесс $x_{Bi}(t)$, который описывается выражением

$$x_{Bi}(t) = x_{0i} e^{A(t-\tau)}, \quad (3)$$

где x_{0i} – значение переменной в момент окончания импульса

$$x_{0i} = x_i(T_i + t_i). \quad (4)$$

Рассмотрим случай модуляции с помощью прямоугольных импульсов амплитудой U_m , что упрощает выражение (2)

$$x_i(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot U_m d\tau = U_m e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} d\tau = -U_m e^{At} (e^{-At} - I) \cdot A^{-1} = (I - e^{At}) \cdot X_B, \quad (5)$$

где I – единичная матрица, X_B – вынужденное значение сигнала.

При использовании формул (3) и (5) реакция цепи на каждый импульс рассчитывается независимо. При этом реакции на импульсы модуляции соответствуют временным интервалам импульсов модуляции, что объясняет удобство использования двойного ряда Фурье, а для составляющих свободного процесса на каждый импульс – ряд Фурье одной переменной.

Рассмотрим методику расчета спектра однополярной широтно-импульсной модуляции (ШИМ) II рода с модуляцией заднего фронта [2] при включении на выходе модулятора L-фильтра, нагрузки с сопротивлением R и источника напряжения E_H . Пусть на интервале накопления энергии и на интервале передачи энергии в нагрузку параметры схемы замещения одинаковые, а ее постоянная времени равна $\tau = L/R$. На рис. 2, а показана примерная форма напряжения на выходе модулятора U_M и ток нагрузки $I_R(t)$ для случая $k = \omega/\Omega = 20$.

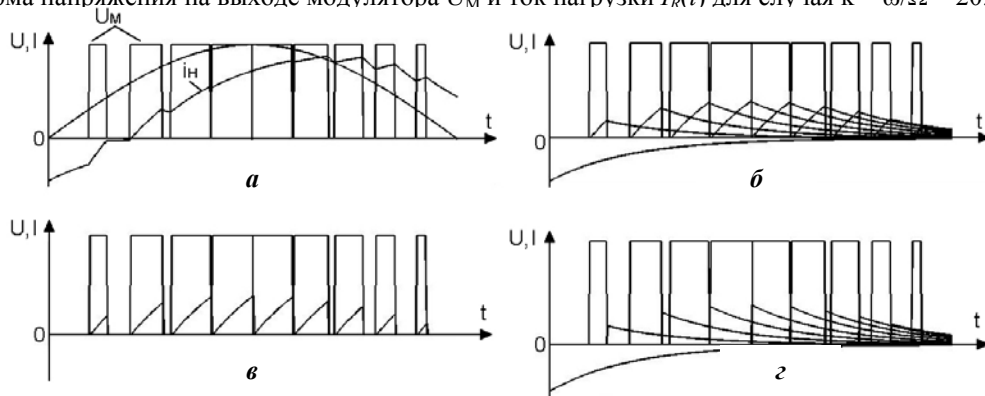


Рис. 2

На первом этапе ток $I_R(t)$ представляется как сумма токов, вызванных начальными условиями в начале полупериода сигнала модуляции $I_{0П}$ и каждым импульсом ШИМ $I_{ШИМ(i)}$ длительностью $\gamma_i T$, где γ_i – коэффициент заполнения импульсов на i -м периоде ШИМ

$$I_R(t) = I_{0П} e^{-t/\tau} + \sum_{i=1}^N I_{ШИМ(i)}(t). \quad (6)$$

Временные диаграммы составляющих тока нагрузки показаны на рис. 2, б. После этого составляющая тока, вызванная i -м импульсом ШИМ, рассматривается отдельно на двух временных интервалах: 1) $(i-1)T \dots ((i-1)+\gamma_i)T$ – источник напряжения подключается к нагрузке; 2) $((i-1)+\gamma_i)T \dots \Theta/2$ – свободная составляющая на i -й импульс ШИМ. Результат разделения во временной области составляющих тока показан на рис. 2, в – переходные составляющие реакции на каждый импульс, которые рассчитываются с помощью двойного ряда Фурье, и рис. 2, з – свободные составляющие на каждый импульс ШИМ, которые рассчитываются с помощью ряда Фурье одной переменной. Очередность расчета спектра составляющих рис. 2, в и з не влияет на конечный результат.

Вначале рассмотрим последовательность расчета спектра составляющих тока с помощью двойного ряда Фурье. Ток i -го импульса ШИМ $I_{ШИМ(i)}$ описывается следующим выражением:

$$I_{ШИМ(i)}(t) = I_B (1 - e^{-t/\tau}), \quad (7)$$

где $I_B = E_H/R$ – вынужденная составляющая тока нагрузки.

Для расчета спектра введем переменные $x = \omega t$, $y = \Omega t$. Подставляя аналитическое выражение импульсов тока, которые описываются выражением (7), в формулу для расчета спектра модулированного сигнала [2],

получим

$$A_{mn} + jB_{mn} = \frac{I_B}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_0^{E_f(y)} (1 - e^{-x/\tau\omega}) e^{j(mx+ny)} dx dy - \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{2\pi - E_f(y)} (1 - e^{-x/\tau\omega}) e^{j(mx+ny)} dx dy \right), \quad (8)$$

где $E = 2\pi/C$, C – амплитуда пилообразного напряжения.

Разделим интеграл (8) на две части

$$A_{mn} + jB_{mn} = \frac{I_B}{2\pi^2} \left(\left[\int_0^{\pi} \int_0^{E_f(y)} e^{j(mx+ny)} dx dy - \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{2\pi - E_f(y)} e^{j(mx+ny)} dx dy \right] - \left[\int_0^{\pi} \int_0^{E_f(y)} \frac{-x}{\tau\omega} e^{j(mx+ny)} dx dy - \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{2\pi - E_f(y)} \frac{-x}{\tau\omega} e^{j(mx+ny)} dx dy \right] \right). \quad (9)$$

Обозначим первую часть выражения (9) в квадратных скобках $A_{mn(1)} + jB_{mn(1)}$. Она описывает спектр напряжения (тока) для случая активной нагрузки и рассчитана в [2]

$$A_{m(2n-1)(1)} + jB_{m(2n-1)(1)} = \frac{2H}{jm\pi^2(2n-1)} + \frac{H}{m\pi^2} \int_0^{\pi} e^{j(Emf(y)+(2n-1)y)} dy. \quad (10)$$

Для упрощения второй части выражения (9) проинтегрируем его по переменной x

$$A_{mn(2)} + jB_{mn(2)} = \frac{-I_B}{2\pi^2(jm - 1/\tau\omega)} \left(\int_0^{\pi} e^{-\frac{E_f(y)}{\tau\omega}} e^{j(mEf(y)+ny)} - e^{jny} dy - \int_{\pi}^{2\pi} \left(e^{\frac{E_f(y)}{\tau\omega}} e^{j(-mEf(y)+ny)} - e^{jny} \right) dy \right). \quad (11)$$

При условии симметрии функции модуляции $f(y)$ относительно начала координат выражение (11) упрощается. Для парных n оно равно нулю, а для непарных

$$A_{m(2n-1)(2)} + jB_{m(2n-1)(2)} = \frac{-I_B}{\pi^2(jm - 1/\tau\omega)} \left(\frac{2}{j(2n-1)} + \int_0^{\pi} \left(e^{j(mEf(y)+(2n-1)y)} e^{-\frac{E_f(y)}{\tau\omega}} \right) dy \right). \quad (12)$$

Сумма выражений (10) и (12) позволяет получить в свернутой форме часть спектра реакции цепи с частотой модуляции ω , что уменьшает объем вычислений. Спектр составляющих тока с периодом модулирующего сигнала Θ , изображенных на рис. 2, з, рассчитывается с помощью ряда Фурье одной переменной по формуле

$$A_n + jB_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(I_{0B(2)}(y) + \sum_i I_{iB(2)}(y) \right) e^{jny} dy, \quad (13)$$

где $I_{0B(2)}(y)$ – начальные условия в начале полуцикла модулированного сигнала, $I_{iB(2)}(y)$ – составляющие тока, вызванные i -м импульсом ШИМ, на интервале $((i-1) + \gamma_i)T \dots \Theta/2$.

Составляющая $I_{0B(2)}(t)$ рассчитывается по формуле

$$I_{0B(2)}(t) = I_{0II} e^{-t/\tau} \Rightarrow I_{0B(2)}(y) = I_{0II} e^{-y/\Omega\tau}. \quad (14)$$

Составляющие $I_{iB(2)}(t)$ равны нулю, в случае $t \leq (i-1 + \gamma_i)T_{ШИМ}$. В другие интервалы времени они равны $I_{0Bi(2)}(t) = I_{ШИМ(i)}(\gamma_i T) e^{-(t-(i-1+\gamma_i)T)/\tau} = I_B (1 - e^{-\gamma_i T/\tau}) e^{-(t-(i-1+\gamma_i)T)/\tau}$ в случае $(i-1+\gamma_i)T < t \leq \Theta/2$ или с учетом замены $y = \Omega t$

$$I_{0Bi(2)}(y) = I_B (1 - e^{-\gamma_i T/\tau}) e^{-(y/\Omega - (i-1+\gamma_i)T)/\tau}, \quad \text{в случае} \quad 2\pi(i-1+\gamma_i)T/\Theta < y \leq \pi, \quad (15)$$

где значения тока $I_{ШИМ(i)}(\gamma_i T)$ рассчитываются по формуле (7). Подстановка выражений (14) и (15) в формулу (13) дает следующий результат:

$$A_n + jB_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} I_{0II} e^{-y/\Omega\tau} e^{jny} dy + \frac{2}{\pi} \int_{2\pi(i-1+\gamma_i)T/\Theta}^{\pi} \sum_{i=0}^{\frac{\omega}{2\Omega}-1} I_B (1 - e^{-\gamma_i T/\tau}) e^{-(y/\Omega - (i-1+\gamma_i)T)/\tau} e^{jny} dy. \quad (16)$$

Первое слагаемое в формуле (16) рассчитывается непосредственно, в другом слагаемом – меняется очередность операций интегрирования и суммирования

$$A_n + jB_n = 2I_{0II} \left(e^{-\pi/\Omega\tau} (-1)^n - 1 \right) / \pi(jn - 1/\Omega\tau) + 2I_B e^{-T/\tau} / \pi(jn - 1/\Omega\tau) \sum_{i=0}^{\frac{\omega}{2\Omega}-1} (1 - e^{-\gamma_i T/\tau}) e^{(i+\gamma_i)T/\tau} \left(e^{-\pi/\Omega\tau} (-1)^n - e^{-(i-1+\gamma_i)T/\tau + jn2\pi(i-1+\gamma_i)T/\Theta} \right). \quad (17)$$

Расчет коэффициентов ряда Фурье модулированного сигнала состоит в суммировании коэффициентов каждой составляющей, рассчитанных по формулам (10), (16), (17). В целом разработанная методика значительно уменьшает объем расчетов и дает возможность описать спектральную характеристику в компактном виде.

Выводы. 1. Использование метода наложения дает возможность представить суммарный переходной процесс в цепи как сумму переходных процессов, вызванных каждым импульсом модулированного напряжения, что позволяет разделить составляющие, спектр которых целесообразно рассчитывать с помощью рядов Фурье одной или двух переменных.

2. Совместное использование рядов Фурье одной и двух переменных позволяет уменьшить объем вычислений и получить спектральную характеристику сигнала в свернутой форме.

1. Демирчян К.С. Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. – М.: Высш. шк., 1988. – 335 с.

2. D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo. Pulse width modulation for power converters. Theory and practice / IEEE Press Series on Power Engineering, 2003. – 724 p.

УДК 621.314

ВИКОРИСТАННЯ ПОДВІЙНОГО РЯДУ ФУР'Є ДЛЯ РОЗРАХУНКУ СПЕКТРУ МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ

Вербицкий С.В., канд.техн.наук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,

пр. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна,

e-mail: verbitskiy@bigmir.net

Обґрунтовано доцільність використання подвійного ряду Фур'є для розрахунку спектру модульованих сигналів. Описано обмеження його застосування для відфільтрованих сигналів. Запропоновано методику спільного застосування рядів Фур'є однієї і двох змінних, яка базується на методі накладання, що дозволяє отримати спектральну характеристику в згорнутій формі. Бібл. 2, рис. 2.

Ключові слова: імпульсна модуляція, подвійний ряд Фур'є, спектральна характеристика.

DOUBLE FOURIER SERIES USING FOR CALCULATING MODULATING SIGNALS SPECTRUM

Verbitskiy Ye.V.

National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”,

pr. Peremohy, 37, Kyiv, 03056, Ukraine,

e-mail: verbitskiy@bigmir.net

Expidence double Fourier series using for modulating signals calculating are validated. Restriction for filtering signals are describing. Method Fourier series one and two variable collective using, which based on superposition method and give spectrum response in convolute form are proposed. References 2, figures 2.

Key words: pulse modulation, double Fourier series, spectrum response.

1. Demirchian K.S. Butyrin P.A. Electric circuits simulation and machine calculation – Moskva: Vysshia Shkola, 1988. – 335 p. (Rus)

2. D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo. Pulse width modulation for power converters. Theory and practice // IEEE Press Series on Power Engineering, 2003. – 724 p.

Надійшла 30.01.2014