УДК 621.3.011.74.005

Н.А.Шидловська, член-кор. НАН України, **О.П.Кравченко**, канд.техн.наук (Ін-т електродинаміки НАН України, Київ), **В.Г.Самойленко**, докт.фіз.-мат.наук, (Київський нац.ун-т ім. Т.Шевченка, Київ)

Дослідження процесів в нелінійних коливальних колах за допомогою методу усереднення Боголюбова

В роботі з використанням методу усереднення Боголюбова проаналізовано розрядні RLC-кола, в яких всі три елементи розглядаються почергово як нелінійні. За допомогою методу усереднення Боголюбова одержано співвідношення, що описують процеси у зазначених колах.

В работе с использованием метода усреднения Боголюбова проанализированы разрядные RLC-цепи, в которых все три элемента поочередно рассматриваются как нелинейные. При помощи метода усреднения Боголюбова получены соотношения, описывающие процессы в означенных цепях.

Зростання вимог до електротехнічних та електроенергетичних пристроїв, яке ми спостерігаємо останнім часом, потребує впровадження якісно нових методів для аналізу процесів в них. Виникає необхідність враховувати нелінійний характер елементів пристроїв у тих випадках, де раніше застосовували лінеаризацію, підвищуються вимоги до математичних моделей зазначених пристроїв та точності розрахунку процесів у них. При малих нелінійностях хороші результати можна одержати при застосуванні до розрахунку методу малого параметру. Особливо у тих випадках, коли є необхідність в урахуванні розширення гармонічного спектру за рахунок нелінійності, або у виокремленні внеску кожної з нелінійностей в остаточні співвідношення [4]. Однак застосування цього методу пов'язане з виконанням великої кількості розрахунків і кінцевий результат має доволі громіздкий вигляд. При використанні методу усереднення Боголюбова [1] результат можна одержати з меншою трудомісткістю розрахунків, і остаточні формули мають більш компактний вигляд, однак вони не дозволяють врахувати розширення гармонічного спектру і внесок кожної з нелінійностей в остаточній формулі явно не виокремлений. Крім того, постає необхідність в дослідженні стійкості лінійного випадку. Але, попри все, якісний аналіз за допомогою методу усереднення Боголюбова можна виконати значно швидше і тому його застосування у багатьох випадках себе виправдовує.

У даній роботі за допомогою методу усереднення Боголюбова проаналізовано послідовне RLC-коло, у якому почергово кожен з елементів будемо розглядати як нелінійний, а решту — лінійними. На початку розглянемо нелінійні характеристики елементів кола та за допомогою закону Кірхгофа [2] запишемо рівняння, що описують процеси у колі в усіх трьох випадках.

1. *Нелінійна індуктивність* з феромагнітним осердям описується співвідношенням, що враховує залежність потокозчеплення від заряду [3] і має вигляд

$$\Psi = L_0 \frac{dq}{dt} - \varepsilon \left(\frac{dq}{dt} \right)^3, \qquad (1)$$

де q — величина заряду на конденсаторі; L_0 — індуктивність, що відповідає лінійному випадку; ε — малий параметр.

Для такого кола за законом Кірхгофа можна записати рівняння

$$\frac{d\Psi}{dt} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 . \qquad (2)$$

Підставляючи співвідношення (1) в рівняння (2), маємо

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L_0}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{L_0 C} = \varepsilon \frac{3}{L_0}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \frac{d^2q}{dt^2} . \qquad (3)$$

З метою уникнення нелінійності при старшій похідній було виконано ряд математичних перетворень [5], в результаті яких рівняння (3) набуває вигляду

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\delta\frac{dq}{dt}+\omega^2q=-\varepsilon\frac{3}{L_0}\left[\frac{R}{L_0}\left(\frac{dq}{dt}\right)^3+\frac{q}{L_0C}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right], \tag{4}$$

де $2\delta=R/L_0$, $\omega^2=(L_0C)^{-1}$. (5)

2. Для *нелінійного конденсатора* з сегнето-діелектриком кулон-вольтна характеристика має вигляд [3]

$$u_C=d_1q+d_3q^3, \tag{6}$$

де q — заряд на конденсаторі; d_1, d_3 — const.

За законом Кірхгофа можемо записати

$$iR+L\frac{di}{dt}+d_1q+d_3q^3=0, \tag{7}$$

або

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\delta\frac{dq}{dt}+\omega_1^2q+\frac{d_3}{L}q^3=0, \tag{8}$$

де

$$\omega_1^2=d_1/L, \tag{9}$$

а d_3 — мала величина.

3. *Нелінійність активного опору,* як правило (коли нелінійність не лежить в основі функціонування пристрою), описується співвідношенням [3]

$$R=R_0\left(1+mi^2\right), \tag{10}$$

де m — малий параметр.

Для кола розряду лінійного конденсатора на лінійну індуктивність та нелінійний опір має місце наступне рівняння:

$$L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}+iR_0\left(1+mi^2\right)=0, \tag{11}$$

або

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\delta\frac{dq}{dt}+\omega^2q=-\frac{mR_0}{L}\left(\frac{dq}{dt}\right)^3. \tag{12}$$

Рівняння (4), (8), (12) в загальному вигляді можна записати наступним чином:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\delta\frac{dq}{dt}+\omega^2q=\varepsilon F\left(q,\frac{dq}{dt}\right). \tag{13}$$

Позначимо

$$q=x_1;\qquad dq/dt=x_2 \tag{14}$$

і перетворимо співвідношення (4), (8) і (12) у відповідні системи двох рівнянь першого порядку для випадків 1—3 відповідно:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{x_1}{L_0C}-\dfrac{R}{L_0}x_2-\varepsilon\dfrac{3}{L_0}x_2^2\left(\dfrac{R}{L_0}x_2+\dfrac{x_1}{L_0C}\right)\end{cases}. \tag{15}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{x_1}{LC}-\dfrac{R}{L}x_2-\varepsilon k_1x_2^3\end{cases}. \tag{16}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{x_1}{LC}-\dfrac{R}{L}x_2-\varepsilon k_2\dfrac{R}{L_0}x_2^3\end{cases}. \tag{17}$$

Для застосування методу усереднення Боголюбова [1] необхідна перевірка на стійкість системи. У всіх трьох випадках можна використати теорему Ляпунова про стійкість за першим наближенням до лінеаризованих систем (15—17) в околі положення рівноваги. Лінеаризовані системи (15—17) співпадають і мають наступний вигляд:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{x_1}{LC}-\dfrac{R}{L}x_2\end{cases}. \tag{18}$$

Положенням рівноваги такої системи є точка $(x_1, x_2)=(0, 0)$.

Розглянемо визначник $\left|A-\lambda E\right|=0$, де

$$A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L}\end{vmatrix}. \tag{19}$$

Достатньою умовою стійкості положення рівноваги (0,0) системи (18) за теоремою Ляпунова про перше наближення [3] є умова $\operatorname{Re}\lambda_1\le 0$; $\operatorname{Re}\lambda_2\le 0$; $\lambda_1\ne\lambda_2$, яка, очевидно, виконується, оскільки корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2+\frac{R}{L_0}\lambda+\frac{1}{L_0C}=0$$

мають вигляд

$$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L_0}\pm\left(\frac{R^2}{4L_0^2}-\frac{1}{L_0C}\right)^{0.5}. \tag{20}$$

Отже, нульовий розв'язок системи (10) є асимптотично стійким.

Перейдемо до побудови наближеного розв'язку рівнянь (4), (8), (12) за допомогою методу усереднення Боголюбова.

Для визначення величини заряду функцію $q=q(t)$ представимо у вигляді [1]

$$q=ae^{-\delta t}\cos\varphi\,, \tag{21}$$

де $a=a(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ — нові невідомі функції, які будемо знаходити таким чином, щоб виконувалась рівність

$$\frac{dq}{dt}=-ave^{-\delta t}\sin\varphi-a\delta e^{-\delta t}\cos\varphi\,, \tag{22}$$

де $v^2=\omega^2-\delta^2$, $(\omega^2-\delta^2>0)$.

Виходячи з співвідношення (21), обчислимо першу похідну

$$\frac{dq}{dt}=-a\delta e^{-\delta t}\cos\varphi+\frac{da}{dt}e^{-\delta t}\cos\varphi-e^{-\delta t}a\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi. \tag{23}$$

Прирівнюючи (22) та (23), можемо записати

$$\frac{da}{dt}\cos\varphi-\frac{d\varphi}{dt}a\sin\varphi=-av\sin\varphi\,. \tag{24}$$

Аналогічно обчислимо другу похідну по t від q з рівняння (23)

$$\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{da}{dt}\left(-ve^{-\delta t}\sin\varphi-\delta e^{-\delta t}\cos\varphi\right)+$$
$$+\frac{d\varphi}{dt}\left(-ave^{-\delta t}\cos\varphi+a\delta e^{-\delta t}\sin\varphi\right)+$$
$$+av\delta e^{-\delta t}\sin\varphi+a\delta^2e^{-\delta t}\cos\varphi\,. \tag{25}$$

Подальший аналіз пов'язано з урахуванням особливостей нелінійних елементів.

1. У випадку *нелінійної індуктивності* та лінійних ємності та опору [6] скористаємося рівнянням (4), у яке підставимо співвідношення (22) та (25)

$$\frac{da}{dt}\left(-v\sin\varphi-\delta\cos\varphi\right)+\frac{d\varphi}{dt}\left(-av\cos\varphi+a\delta\sin\varphi\right)=$$
$$=a\delta v\sin\varphi-av^2\cos\varphi+\varepsilon\frac{3a^3}{L_0}e^{-2\delta t}\Big[2\delta v^3\sin^3\varphi+$$
$$+v^2\left(6\delta^2-\omega^2\right)\sin^2\varphi\cos\varphi+2v\delta\left(3\delta^2-\omega^2\right)\times$$
$$\times\sin\varphi\cos^2\varphi+\delta^2\left(2\delta^2-\omega^2\right)\cos^3\varphi\Big]. \tag{26}$$

Рівняння (24) та (26) складають систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно величин da/dt, $d\varphi/dt$. Використовуючи для її розв'язання метод Крамера, знаходимо

$$\frac{da}{dt}=-\varepsilon\frac{3a^3}{vL_0}e^{-2\delta t}\Big[2\delta v^3\sin^4\varphi+v^2\big(6\delta^2-$$
$$-\omega^2\big)\sin^3\varphi\cos\varphi+2v\delta\left(3\delta^2-\omega^2\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+$$
$$+\delta^2\left(2\delta^2-\omega^2\right)\sin\varphi\cos^3\varphi\Big], \tag{27}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=v-\varepsilon\frac{3a^3}{vL_0}e^{-2\delta t}\Big[2\delta v^3\sin^3\varphi\cos\varphi+v^2\big(6\delta^2-$$
$$-\omega^2\big)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+2v\delta\left(3\delta^2-\omega^2\right)\sin\varphi\cos^3\varphi+$$
$$+\delta^2\left(2\delta^2-\omega^2\right)\cos^4\varphi\Big]. \tag{28}$$

Застосовуючи тепер метод усереднення Боголюбова [1] (за змінною φ), з (27), (28) знаходимо диференціальні рівняння для визначення першого наближення для величин $a=a(t)$, $\varphi=\varphi(t)$

$$\frac{da}{dt}=-\varepsilon\frac{3a^3}{vL_0}e^{-2\delta t}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[2\delta v^3\sin^4\varphi+v^2\big(6\delta^2-$$
$$-\omega^2\big)\sin^3\varphi\cos\varphi+2v\delta\left(3\delta^2-\omega^2\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+$$
$$+\delta^2\left(2\delta^2-\omega^2\right)\sin\varphi\cos^3\varphi\Big]d\varphi=-\varepsilon\frac{3a^3}{2L_0}e^{-2\delta t}\delta\omega^2, \tag{29}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=v-\varepsilon\frac{3a^2}{vL_0}e^{-2\delta t}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[2\delta v^3\sin^3\varphi\cos\varphi+v^2\big(6\delta^2-$$
$$-\omega^2\big)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+2v\delta\left(3\delta^2-\omega^2\right)\sin\varphi\cos^3\varphi+$$
$$+\delta^2\left(2\delta^2-\omega^2\right)\cos^4\varphi\Big]d\varphi=$$
$$=v-\varepsilon\frac{3a^2}{8vL_0}e^{-2\delta t}\omega^2\left(3\omega^2-4v^2\right). \tag{30}$$

Інтегруючи рівняння (29), знаходимо

$$a(t)=\left(\frac{1}{a_0^2}+\varepsilon\frac{3\omega^3}{2L_0}e^{-2\delta t_0}-\varepsilon\frac{3\omega^2}{2L_0}e^{-2\delta t}\right)^{-0,5}, \tag{31}$$

де t_0 — початковий момент часу (будемо вважати $t_0=0$); a_0 — початкове значення величин $a=a(t)$ (при $t=t_0$); при цьому виконується умова

$$\frac{1}{a_0^2}-\varepsilon\frac{3\omega^2}{2L_0}>0. \qquad (32)$$

При $t_0=0$, $\varphi(0)=0$ величина a_0 характеризує початковий заряд на конденсаторі. Отже

$$q(0)=a(0)=a_0=Q. \qquad (33)$$

Підставляючи вираз (31) в рівняння (30), знаходимо після інтегрування аналітичний вираз для величини $\varphi(t)$ в першому наближенні

$$\varphi_L=\varphi_0+\nu t-\frac{3\omega^2-4\nu^2}{8\nu^2\delta}\left[\ln\left(\frac{1}{Q^2}+\varepsilon\frac{3\omega^2}{2L_0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varepsilon\frac{3\omega^2}{2L_0}e^{-2\delta t}\right)-\ln\frac{1}{Q^2}\right]. \qquad (34)$$

У випадку $3\omega^2-4\nu^2=0$, тобто коли $R=(L_0/C)^{0.5}$, фаза $\varphi(t)$ аперіодичних коливань в електричному колі визначається формулою

$$\varphi=\nu t+\varphi_0, \qquad (35)$$

де φ_0 — початкове значення фази.

Враховуючи вирази (31) та (34) при розв'язанні рівняння (21), знайдемо кінцевий вираз для заряду на конденсаторі в розрядному контурі з нелінійною індуктивністю

$$q_L(t)=e^{-\delta t}\cdot\left[\frac{1}{Q^2}+\varepsilon\frac{3\omega^2}{2L_0}\left(1-e^{-2\delta t}\right)\right]^{-0.5}\times$$

$$\times\cos\left\{\varphi_0+\nu t-\frac{3\omega^2-4\nu^2}{8\nu^2\delta}\left[\ln\left(\frac{1}{Q^2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\varepsilon\frac{3\omega^2}{2L_0}\left(1-e^{-2\delta t}\right)\right)-\ln\frac{1}{Q^2}\right]\right\}. \qquad (36)$$

2. У випадку розряду *нелінійного конденсатора* на лінійні індуктивність та опір процеси в колі описуються рівнянням (8). Функцію заряду $q=q(t)$ будемо знаходити у вигляді (21) з виконанням умови (22). При цьому перша та друга похідні заряду мають вигляд співвідношень (22) та (25).

Підставляючи співвідношення (22) та (25) в рівняння (8), одержимо

$$\frac{da}{dt}\left(-\nu\sin\varphi-\delta\cos\varphi\right)+\frac{d\varphi}{dt}\left(-a\nu\cos\varphi+a\delta\sin\varphi\right)-$$

$$-a\nu\delta\sin\varphi+a\nu^2\cos\varphi=-d_3a^3e^{-2\delta t}\cos^3\varphi/L. \qquad (37)$$

Із системи рівнянь (24) та (37) знайдемо співвідношення da/dt і $d\varphi/dt$:

$$\frac{da}{dt}=\frac{d_3}{\nu L}a^3e^{-2\delta t}\cos^3\varphi\sin\varphi;$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\nu+\frac{d_3}{\nu L}a^2e^{-2\delta t}\cos^4\varphi. \qquad (38)$$

Застосуємо метод усереднення Боголюбова [1]. Для цього запишемо рівняння для визначення першого наближення для величин $a=a(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ за змінною φ

$$\frac{da}{dt}=\frac{d_3}{\nu L}a^3e^{-2\delta t}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi;$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\nu+\frac{d_3}{\nu L}a^2e^{-2\delta t}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi d\varphi. \qquad (39)$$

Після інтегрування системи рівнянь (36), маємо $a=Q$,

$$\varphi_C=\nu t-\frac{3d_3}{16\delta\nu L}Q^2e^{-2\delta(t-t_0)}. \qquad (40)$$

Підставляючи (40) в (21), остаточно для заряду маємо

$$q_C=Qe^{-\delta t}\cos\left(\nu t-\frac{3d_3}{16\delta\nu L}Q^2e^{-2\delta(t-t_0)}\right). \qquad (41)$$

3. У випадку *нелінійного опору* та лінійних індуктивностей та ємності маємо співвідношення (12). Подібно до попередніх випадків, заряд будемо знаходити у вигляді (21), та після відповідних математичних перетворень одержимо систему диференціальних рівнянь для знаходження $a=a(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ вигляду:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{a}{\nu}\left(\nu^2-\delta^2\right)\sin\varphi\cos\varphi+2a\delta\sin^2\varphi-$$

$$-\frac{Ra}{\nu L}\left(\nu\sin^2\varphi+\delta\sin\varphi\cos\varphi\right)+\frac{a}{\nu LC}\sin\varphi\cos\varphi-$$

$$-\frac{mR_0a^3}{\nu L}e^{-2\delta t}\left(\nu^3\sin^4\varphi+3\nu^2\delta\sin^3\varphi\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+3\nu\delta^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\delta^3\sin\varphi\cos^3\varphi\right), \qquad (42)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=a\delta\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{\nu}\left(\delta^2+\frac{1}{LC}\right)\cos^2\varphi+\nu\sin^2\varphi+$$

$$+\frac{R}{L}\left(\sin\varphi\cos\varphi-\frac{\delta}{\nu}\cos^2\varphi\right)-$$

$$-\frac{mR_0\,a^2}{\nu L}e^{-2\delta t}\left(\nu^3\sin^3\varphi\cos\varphi+3\nu^2\delta\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\right.$$

$$\left.+3\nu\delta^2\sin\varphi\cos^3\varphi+\delta^3\cos^4\varphi\right).$$

Запишемо рівняння, які визначають перші наближення для $a=a(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, скориставшися методом усереднення Боголюбова

$$\frac{da}{dt}=-\frac{a}{\nu}\left(\nu^2-\delta^2\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi+$$

$$+2a\delta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{Ra}{\nu L}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\nu\sin^2\varphi-\right.$$

$$\left.-\delta\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi;$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{1}{\nu}\left(\delta^2+\frac{1}{LC}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi+ \tag{43}$$

$$+\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi-\frac{R\delta}{\nu L}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi-$$

$$-\frac{3m\delta R_0}{8\nu L}a^2e^{-2\delta t}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\nu^2\left(1-\cos 4\varphi\right)+\delta^2\right]d\varphi;$$

Інтегруючи рівняння (43), одержимо $a = Q$,

$$\varphi_R=\nu t-\frac{3m\delta}{8\nu}\left(\nu^2-\delta^2\right)Q^2e^{-2\delta(t-t_0)}. \tag{44}$$

Підставляючи співвідношення (44) в (21), для заряду остаточно можемо записати

$$q_R=Qe^{-\delta t}\cos\left[\nu t-\frac{3m\delta}{8\nu}\left(\nu^2-\delta^2\right)Q^2e^{-2\delta(t-t_0)}\right].$$

Таким чином, в роботі отримано співвідношення, що описують процеси в нелінійному коливальному контурі з втратами для випадків одного нелінійного та двох лінійних елементів. При цьому нелінійність характеристик елементів описується співвідношеннями: для індуктивності — (1), для ємності — (6), для опору — (10). Виявлено, що у всіх трьох випадках нелінійність впливає як на амплітудне значення, так і на аргумент косинуса. При цьому у випадку нелінійної індуктивності вплив нелінійності найбільш виражений. Зазначимо також, що при нелінійності реактивних елементів нелінійність є чинником, що зменшує аргумент косинуса, а у випадку нелінійного активного елементу нелінійність може бути як зменшуючим, так і збільшуючим аргумент косинусу чинником. Якого напрямку набуде вплив нелінійності залежить від співвідношень між параметрами кола.

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1974. — 504 с.

2. *Зевеке Г.В., Ионкин П.А. и др.* Основы теории цепей. — М.: Энергия, 1975. — 752 с.

3. *Филиппов Е.* Нелинейная электротехника. — М.: Энергия, 1976. — 496 с.

4. *Шидловська Н.А.* Аналіз нелінійних електричних кіл методом малого параметру. — Київ. НАНУ. ІЕД, 1999. — 192 с.

5. *Шидловська Н.А., Кравченко О.П., Кучерява І.М. та ін.* Застосування методу усереднення Боголюбова до аналізу процесів в нелінійних коливальних колах з втратами // Техн. електродинаміка. Тем.вип. "Проблеми сучасної електротехніки". — 2006. — Ч. 2. — С. 3—6.

6. *Шидловська Н.А., Кравченко О.П., Самойленко В.Г.* Аналіз нелінійного кола за допомогою методу усереднення Боголюбова // Доповіді НАНУ. — 2006. — № 6. — С. 88—92.

Надійшла 20.07.2007