

Кубические сплайны в алгоритмах цифровой обработки информации встроенных средств измерительных систем

Рассмотрены принципы приближения и интерполяции кубическими сплайнами последовательности данных. Предложен алгоритм интерполяции значений данных для микроконтроллеров и сигнальных процессоров измерительных информационных систем. Приведен пример использования кубических сплайнов для линеаризации статической характеристики измерителя магнитной индукции с датчиком Холла.

Розглянуто принципи наближення та інтерполяції кубічними сплайнами послідовності даних. Запропоновано алгоритм інтерполяції значень даних для мікроконтролерів і сигнальних процесорів вимірювальних інформаційних систем. Наведено приклад використання кубічних сплайнів для лінеаризації статичної характеристики вимірювача магнітної індукції з датчиком Холла.

Возможности микроэлектроники и цифровых методов обработки сигналов основательно изменили принципы построения измерительных информационных систем. Предпочтительными оказываются методы и средства измерений, которые кондиционируют собственно измерительную информацию, зачастую оставляя за обработкой измерительного сигнала лишь его усиление и преобразование в цифровую форму. Обработка измерительной информации встроенными в измерительные информационные системы микропроцессорами и сигнальными процессорами производится вычислительными алгоритмами цифровой фильтрации, корреляции, спектрального анализа и др. Особое место в этом ряду занимает приближение функциями последовательностей данных, что позволяет их интерполировать и сглаживать, численно дифференцировать и интегрировать, осуществлять другие линейные и нелинейные преобразования. Интерполяция дискретных данных в условиях ограниченности ресурсов встроенных средств требует эффективной организации вычислений.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма аппроксимации и интерполяции данных кубическими сплайнами для микропроцессоров и сигнальных процессоров, в котором вектор решений системы уравнений или отдельные его элементы определяются без использования матриц данных.

Формирование непрерывной функции из последовательности дискретных значений в общем случае имеет множество решений. Среди этих функций огибающими называются те из них, которые совпадают со значениями исходной последовательности данных. Наилучшим приближением можно считать, например, ту из огибающих, которая могла бы быть описана дифференциальным уравнением с наименьшим порядком из воз-

можных [1]. Такую огибающую функцию называют основной. В этом смысле близкой основным огибающим является и приближение табличных функций полиномами [7].

Формула интерполяционного полинома Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned}
 P(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_N)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_N)} y_0 + \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_N)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_N)} y_1 + \dots \\
 & \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{N-1})}{(x_N-x_1)(x_N-x_2) \dots (x_N-x_{N-1})} y_N = \\
 = & \sum_{i=0}^N y_i \cdot \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^N (x-x_s) \cdot \left[\prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^N (x_i-x_s) \right]^{-1}.
 \end{aligned} \quad (1)$$

Иначе задача интерполяции решается кусочно-полиномиальной системой сплайнов. Пусть для значений $a=x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N=b$, $i=0 \dots N$ определена функция $f(x_i)=y_i$. Согласно [3,4,8] сплайном степени m называют функцию $S(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

— для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $S(x)=S_i(x)$ — полином степени $\leq m$;

— производная порядка $m-1$ $S^{(m-1)}$ существует и непрерывна во всех внутренних точках x_1, \dots, x_{N-1} , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} S_{i-1}^{(m-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S_i^{(m-1)}(x) \quad (2)$$

Ограничим задание сплайна S следующими условиями:

— на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн $S(x)$ является полиномом $S_i(x)$ третьей степени, т.е. кубическим:

$$S_i(x) = A_i x^3 + B_i x^2 + C_i x + D_i; \quad (3)$$

— в точках $x_i, i=0 \dots N$ сплайны $S_i(x)$ принимают значения исходной функции:

$$S_i(x_i) = y_i; \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}; \quad (4)$$

— в точках $x_i, i=1 \dots N-1$ сплайны $S_i(x)$ имеют непрерывную первую производную:

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i). \quad (5)$$

Поскольку $S(x)$ есть кубический полином, то его вторая производная линейна относительно x . Используя формулу интерполяционного полинома Лагранжа (1) первого порядка, запишем

$$S_i''(x) = y_i'' \left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} \right) + y_{i+1}'' \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right), \quad i=0 \dots N-1. \quad (6)$$

Сплайны $S_i''(x), S_{i-1}''(x)$ в граничных точках интервалов $i, i-1$ принимают значения

$$S_i'' = \begin{cases} a_i, & x=x_i \\ a_{i+1}, & x=x_{i+1} \end{cases}; \quad S_{i-1}'' = \begin{cases} a_{i-1}, & x=x_{i-1} \\ a_i, & x=x_i \end{cases};$$

$$S_{i-1}''(x_i) = a_i = S_i''(x_i),$$

т.е. вторая производная сплайна непрерывна в точках $i=1 \dots N-1$.

Интерполирующая функция может быть определена двукратным интегрированием (6)

$$S(x) = \left[y_{i+1}'' (x^3 - 3x_i x^2) - y_i'' (x^3 - 3x_{i+1} x^2) \right] / 6 \cdot \Delta x \quad (7)$$

и после преобразований представлена в виде

$$S(x) = \left[y_{i+1}'' (x-x_i)^3 - y_i'' (x-x_{i+1})^3 \right] / 6 \cdot \Delta x + C_i (x-x_{i+1}) + D_i (x-x_i). \quad (8)$$

В граничных точках интервала функция (8) принимает значения:

$$S_i(x_i) = y_i'' \Delta x^2 / 6 - C_i \Delta x = y_i; \quad (9)$$

$$S_{i+1}(x_i) = y_{i+1}'' \Delta x^2 / 6 + D_i \Delta x = y_{i+1},$$

откуда следует

$$C_i \Delta x = y_i'' \Delta x^2 / 6 - y_i; \quad D_i \Delta x = y_{i+1} - y_{i+1}'' \Delta x^2 / 6. \quad (10)$$

Преобразуем (8), подставив полученные выражения (10)

$$S(x) = \left\{ (x-x_i) \left[y_{i+1}'' \left((x-x_i)^2 - \Delta x^2 \right) + 6y_{i+1} \right] - (x-x_{i+1}) \left[y_i'' \left((x-x_{i+1})^2 - \Delta x^2 \right) + 6y_i \right] \right\} / 6 \Delta x. \quad (11)$$

Первая производная интерполирующей функции (11) определится формулой

$$S'(x) = y_{i+1}'' \frac{(x-x_i)^2}{2\Delta x} - y_i'' \frac{(x-x_{i+1})^2}{2\Delta x} + \left(\frac{y_{i+1}}{\Delta x} - \frac{y_{i+1}'' \Delta x}{6} \right) - \left(\frac{y_i}{\Delta x} - \frac{y_i'' \Delta x}{6} \right). \quad (12)$$

Производная (12) в граничных точках i -го интервала примет значения

$$S'_i(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{3} y_i'' - \frac{1}{6} y_{i+1}'' \right) \Delta x + \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, & x=x_i, \quad (13a) \\ \left(\frac{1}{3} y_{i+1}'' + \frac{1}{6} y_i'' \right) \Delta x + \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, & x=x_{i+1}. \quad (13b) \end{cases}$$

Используем выражение (13b) для определения значения производной в правой граничной точке $x=x_i$ предыдущего, $[i-1]$ -го интервала простым переназначением индексов

$$S'_{i-1}(x_i) = \left(\frac{1}{3} y_{i-1}'' + \frac{1}{6} y_i'' \right) \Delta x + \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}. \quad (14)$$

Подстановка (13a) и (14) преобразует условие (5) к виду

$$y_{i-1}'' + 4y_i'' + y_{i+1}'' = 6 \left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} \right) / \Delta x^2 \quad \text{для } i=1 \dots N-1, \quad (15)$$

связывая значения в трех точках исходной функции со значениями ее второй производной в этих же точках.

Дополнив систему $N-2$ уравнений (15) нулевыми условиями для вторых производных начальной x_0 и конечной x_N точек

$$S''_0(x_0) = y''_0 = 0, \quad S''_{N-1}(x_N) = y''_N = 0, \quad (16)$$

получим систему *натуральных* кубических сплайнов [7]. Здесь ограничимся рассмотрением только *натуральных сплайнов*. Система неоднородных линейных алгебраических уравнений (15) может быть представлена произведением несингулярной симметричной трехдиагональной матрицы системы A ($N-2 \times N-2$) со строгой диагональной доминантой и вектора неизвестных z — значений второй производной y''_i . Правая часть является вектором r , элементы которой определяются из правой части (15) значениями последовательности данных. Такая система уравнений совместна и определена, т.е. имеет однозначное решение.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \\ \vdots \\ y''_{N-2} \\ y''_{N-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} y_0 - 2y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ \vdots \\ y_{N-3} - 2y_{N-2} + y_{N-1} \\ y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_N \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Решение системы уравнений (17) целесообразно искать методом исключения Гаусса по разложению Холецкого [2,5], представляющего собой последовательность нескольких процедур. Общая схема решения предполагает разложение системной матрицы $A \cdot z = r$ на произведение верхнетреугольной матрицы U , диагональные коэффициенты которой равны единице, и нижнетреугольной матрицы L

$$A = LU.$$

После разложения дважды выполняют обратную подстановку

$$LUz = r; \quad Uz = d; \quad Ld = r, \quad (18a, 18b, 18c)$$

определяя сначала d из (18c), а потом и решение z из (18b), т.е.

$$\begin{aligned} u_{0,0} &= a_{0,0}; & u_{0,1} &= a_{0,1}; & l_{1,0} &= a_{1,0}/u_{0,0}, \\ u_{j,j} &= a_{j,j} - l_{j,j-1}u_{j-1,j}; & u_{j,j+1} &= a_{j,j+1}; & l_{j+1,j} &= a_{j+1,j}/u_{j,j}, \\ u_{N-2,N-2} &= a_{N-2,N-2} - l_{N-2,N-3}u_{N-3,N-2}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$j=0 \dots N-2.$$

Упростим (19), исключив значения нижней треугольной матрицы L ,

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 1; & u_{0,1} &= a_{0,1}/a_{0,0} = 0,25; \\ u_{j,j+1} &= (a_{j,j} - u_{j-1,j})^{-1} = (4 - u_{j-1,j})^{-1}; \\ u_{N-2,N-2} &= a_{j,j} - u_{j-1,j} = 4 - u_{j-1,j}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$j=0 \dots N-2.$$

Верхняя треугольная матрица для $N=6$ примет вид:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0,26667 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0,2678 & 0 \\ & & & 1 & 0,26794 \\ & & & & 3,73206 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Поскольку преобразования относились к системной матрице — одному из сомножителей левой части уравнения (15), — то необходимо преобразовать таким же образом и правую часть. Метод исключения Гаусса предусматривает построчные преобразования, когда выбираются и последовательно нормируются строки матрицы первым ненулевым элементом той же строки. Назовем эти строки *текущими*. Преобразованиям в *текущей* строке претерпевают два ненулевых элемента, принадлежащие главной диагонали и верхней субдиагонали. Согласно методу, после нормирования k -ой *текущей* строки преобразовываются и остальные $k+1 \dots N-2$ последующие строки. В нашем случае с каждой текущей строкой преобразовывается только одна последующая строка. Из последующей строки вычитается нормированная текущая строка, умноженная на первый ненулевой коэффициент последующей же строки, который является элементом нижней субдиагонали и равен единице.

Очевидно, что процедура вычисления значений второй производной должна включать следующие операции:

- определение элементов верхней треугольной матрицы (20);
- преобразование правой части системы уравнений (17);
- решение системы неоднородных линейных алгебраических уравнений (17) обратным ходом метода Гаусса;
- дополнение решения уравнений значениями второй производной в граничных точках.

Заметим, что для интерполяции данных во всем диапазоне допустимых значений $x_0 \leq x \leq x_N$ процедуру получения значений второй производной достаточно выполнить только один раз.

Входные данные представлены вектором \mathbf{r} , элементы которого определяются правой частью (17). Как видно из (20), (21), представление матрицы \mathbf{U} можно оптимизировать преобразованием ее в вектор \mathbf{v} , состоящий из $N-1$ элементов, в котором $v_{N-1} = u_{N-2, N-2}$, а индексам $0 \dots N-1$ поставлены в соответствие элементы верхней субдиагонали. Векторы \mathbf{v} и \mathbf{r} , измененные в результате строчных преобразований, предназначены для решения системы уравнений обратным ходом метода Гаусса.

Процедура А получения векторов \mathbf{v} и \mathbf{r} описывается этапами:

$$1. r_k = 6(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) / \Delta x^2 \text{ для } k=1 \dots N-1.$$

$$2. tmp = 4.$$

$$3. v_k = tmp^{-1}, \quad r_k = r_k \cdot v_k, \quad tmp = 4 - v_k, \\ r_{k+1} = r_{k+1} - r_k \text{ для } k=0 \dots N-3.$$

$$4. v_{N-2} = 4 - v_{N-3}.$$

Процедура В, реализующая обратный ход метода Гаусса, размещает результат в векторе \mathbf{z} . Ее описание получит вид:

$$1. z_0 = y''_0 = 0, \quad z_N = y''_N = 0, \\ z_{N-1} = y''_{N-1} = r_{N-2} / v_{N-2}.$$

$$2. z_k = y''_k = r_{k-1} - y''_{k+1} v_{k-1} \text{ для } k=N-2 \dots 1.$$

Процедура С расчета интерполированных значений по формуле (11) предусматривает определение номера интервала i для заданного значения независимой переменной $x \in [x_i, x_{i+1}]$ целочисленным делением $i = x \setminus \Delta x$ и граничных значений

функции $f(x_i) = y_i, f(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Возможно одно-временное вычисление интерполированных значений первой производной по формуле (12) для текущего номера i интервала.

Здесь tmp — переменная для хранения промежуточных данных.

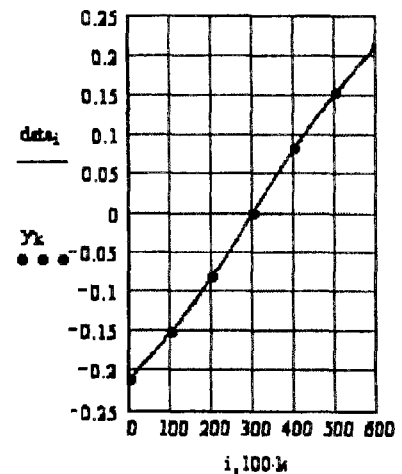
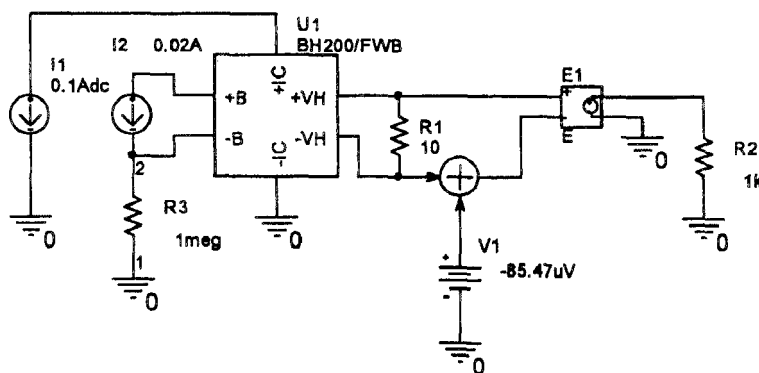
Вектор \mathbf{v} различных значений N , вычисленный на этапе 3 процедуры А, определится выражениями

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0,2500000 \\ 0,2666667 \\ 0,2678571 \\ 0,2679426 \\ 3,7320574 \end{pmatrix} \text{ для } N=6;$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0,2500000 \\ 0,2666667 \\ 0,2678571 \\ 0,2679426 \\ 0,2679487 \\ 0,2679492 \\ 0,2679492 \\ 3,7320508 \end{pmatrix} \text{ для } N=9.$$

Устойчивость вычисления, равномерная по x сходимость сплайна и его производных к интерполируемой функции определяют предпочтения в применении по сравнению с полиномиальной интерполяцией [2].

В качестве примера рассмотрим линеаризацию экспериментально определенной статической характеристики датчика Холла с использованием описанных процедур. Для эксперимента выберем SPICE-модель схемы (рис. 1, а), включающей датчик Холла U1 с активной нагрузкой R1 на его сигнальных выводах $\pm VH$ и компенсацией напряжения неэквипотенциальности постоянным на-



а

б

Рис. 1

пряжением $-85,47$ мкВ источника $V1$. Измерительный сигнал усиливается управляемым напряжением источника напряжения $E1$ с коэффициентом усиления $GAIN=1000$. Статическая характеристика SPICE-модели $V(B)$ определялась для индукции магнитного поля B , изменяющейся в пределах -30 кГс (-30 А) ... $+30$ кГс ($+30$ А) [6] с шагом $0,1$ кГс.

Из последовательности данных $data_i$, $i=0...N$, $N=600$ выбраны равноотстоящие точки $y_k = data_{100k}$, $k=0...m$, $m=6$ (рис. 1, б), которые использовались в качестве исходных для кубической сплайн-интерполяции, описанными выше процедурами. Выбранные точки имитируют результаты физического эксперимента по определению отдельных точек характеристики реального преобразователя на этапе создания измерительной системы.

Линеаризация осуществляется нелинейным преобразованием выходного напряжения датчика Холла функцией, обратной статической характеристике преобразователя, т.е. $V^{-1}(B)$. Эта функция задается исходными точками в новой системе координат, в которой независимой переменной является напряжение $V=VH \times GAIN$, зависимой — магнитная индукция $Blin$ (рис. 2).

Первая часть уравнений (17) определяется на этапе 1 процедуры А. Элементы вектора g показаны на рис. 3, а. Элементы верхнетреугольной матрицы U , преобразованные на этапах 3,4 процедуры А в вектор v , и вектора g — правой части уравнения

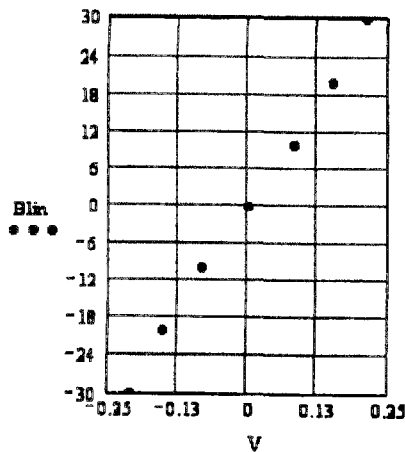


Рис. 2

(17), — расположены в порядке возрастания номеров и показаны на рис. 3, б и 3, в соответственно.

Результатом процедуры В, реализующей обратный ход метода Гаусса, являются значения второй производной в исходных точках. Вектор z кроме значений второй производной содержит также нулевые граничные значения. Графически элементы этого вектора показаны на рис. 3, г.

Абсолютная ошибка интерполяции $\epsilon_i = B lin_i - B_i$, $i=0...600$ не превышает величины, равной $0,05$ кГс, во всем диапазоне изменений индукции магнитного поля $B_i=0,1i - 30$ кГс (рис. 4). Ошибка аппроксимации в исходных точках равна нулю.

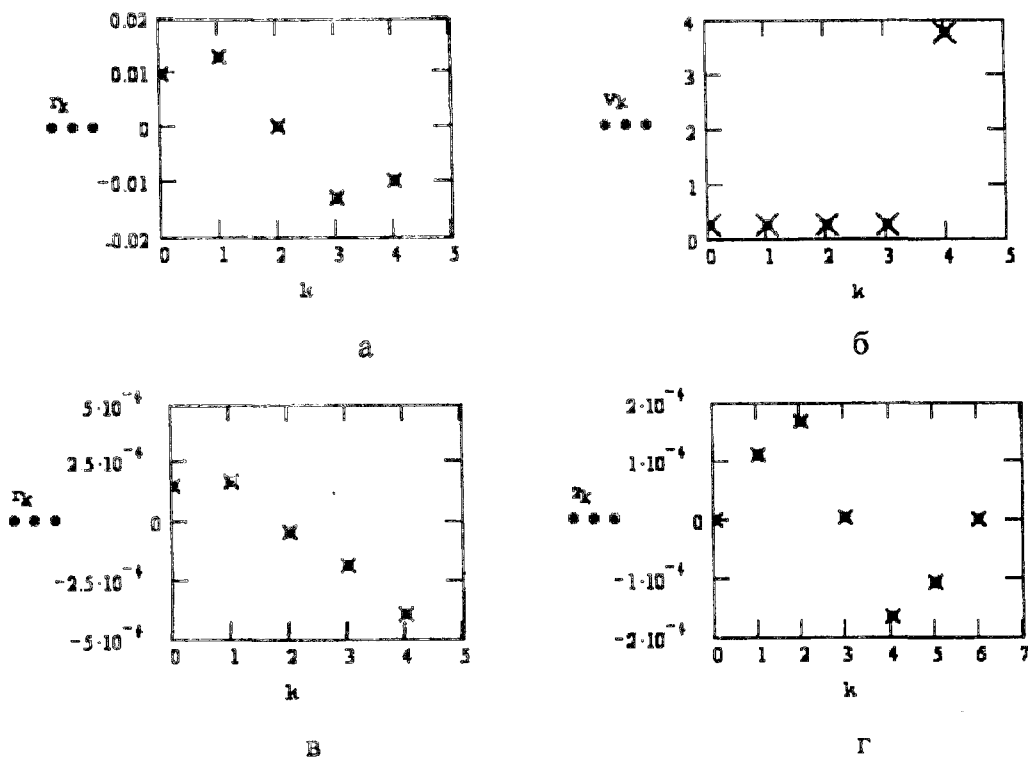


Рис. 3

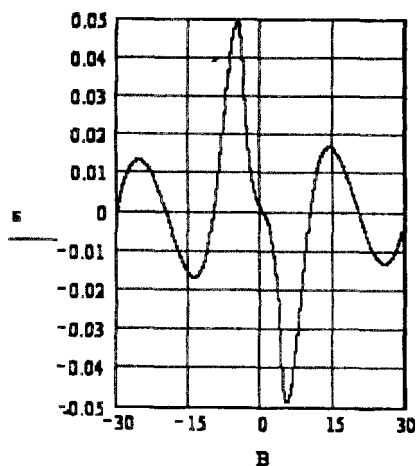


Рис. 4

Выводы. 1. В оптимизированном алгоритме интерполяции вектор решений системы уравнений или отдельные его значения определяются без использования матриц данных, что снижает требования к вычислительным ресурсам встроеной системы.

2. При обработке данных с неизменяемым числом исходных точек можно несколько увеличить быстродействие заданием вектора v на этапе проектирования измерительной системы. Его значения вычисляются по формулам процедуры А

$v_k = (tmp)^{-1}$, $tmp = 4 - v_k$ для $k = 0 \dots N-3$;
 $v_{N-2} = 4 - v_{N-3}$. Вектор r определится вычислениями в процессе интерполяции по формулам той же процедуры $r_k = r_k \cdot v_k$, $r_{k+1} = r_{k+1} - r_k$ для $k = 0 \dots N-3$.

3. Эффективность использования алгоритма показана на примере коррекции статической характеристики измерительного преобразователя.

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 768 с.

2. Воводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

3. Денисюк В.П., Марченко Б.Г. Сплайны и их приложения в задачах моделирования и обработки измерительных сигналов. — К.: 1995. — 246 с.

4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.

5. Каханер Д., Моулер К., Нэй С. Численные методы и программное обеспечение. — М.: Мир, 1998. — 575 с.

6. Мазманян Р.О. и др. SPICE-модели измерительных преобразователей Холла // Техн. электродинамика. Тем.вип. "Проблемы сучасної електротехніки". — Ч.4. — 2006. — С. 104–109.

7. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. — М.: Физматлит, 2000. — 296 с.

8. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука. — 1976. — 248 с.

Надійшла 15.06.2006

До уваги читачів журналу!

В журналі "Технічна електродинаміка" № 1 та № 2, 2007 рік було допущено такі помилки:

— в № 1: ініціали співавтора статті "Енергоэффективность коррекции фазы тока и компенсации пульсаций активной и реактивной мощностей в трехфазной системе электроснабжения" замість Ильина О.А. — Ильина О.В.;

— в № 2: назва статті Клепикова В.Б., Асмоловой Л.В. та Обруч І.В. "Срывные **фрикционные** (замість "функциональные") автоколебания в электромеханических системах и их устранение".

Редакція приносить свої вибачення авторам та читачам журналу.